



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**MODELOVÁNÍ A ANALÝZA KONTAKTNÍHO PORUŠOVÁNÍ
KERAMICKÝCH MATERIÁLŮ**

MODELLING AND ANALYSIS OF THE CONTACT FAILURE OF CERAMIC MATERIALS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Zdeněk Machů

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

BRNO 2017



Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Zdeněk Machů
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování a analýza kontaktního porušování keramických materiálů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Keramické materiály jsou stále atraktivnější pro různé technické aplikace, kde je vyžadována odolnost vůči vysokým teplotám, otěru nebo je primárně žádoucí snížení hmotnosti dané součásti. Častými aplikacemi jsou například keramické náhrady dílů spalovacích motorů, ložisek, válců stolic pro tváření kovových profilů apod. Zásadní problém, při nasazení těchto moderních materiálů, však spočívá v jejich křehkosti a odlišném lomově-mechanickém chování v porovnání s kovy. Specifickou oblastí je např. křehké porušení vlivem kontaktu s tuhým tělesem kulového nebo válcového charakteru, kde v okolí takového kontaktu mohou vznikat trhliny vedoucí až k neprovozuschopnému porušení povrchu součásti (oddělení části povrchu). Znalost kritických zátěžných podmínek vedoucí k takovému porušení je potom klíčová pro správný návrh keramické součásti (především jejího materiálu) i definici dovoleného zatížení, které lze ještě bezpečně na součást aplikovat bez ovlivnění její provozuschopnosti. Cílem práce je tedy, s využitím základní teorie kontaktní mechaniky, namodelovat jednoduchý kontakt kulové plochy s keramickou deskou (analyticky s využitím Hertzovy teorie kontaktů i numericky s využitím MKP softwaru Ansys) a následně s pomocí základních nástrojů lomové mechaniky analyzovat kritické podmínky pro vznik porušení (trhliny) v okolí styku uvedených těles a získané poznatky porovnat s experimenty provedenými na reálných vzorcích.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Provedení rešerše v oblasti kontaktního porušování keramických materiálů. Nastudování základů kontaktní a lomové mechaniky.
- 2) S využitím Hertzovy teorie vytvořit v matematickém softwaru model kontaktu kulové plochy s rovinou deskou, jehož výstupem bude rozložení napětí v okolí kontaktu.
- 3) Vytvoření 2D MKP modelu uvedeného kontaktního problému a jeho deformačně-napěťová analýza s využitím SW Ansys a porovnání výsledků MKP analýzy s analytickým modelem.

- 4) S využitím analytického/numerického modelu analyzovat zátěžné podmínky vedoucí k dosažení kritického napětí na povrchu desky a tedy i k možné iniciaci povrchové trhliny a dále provést parametrickou studii závislosti těchto kritických zátěžných podmínek na průměru vtláčované kulové plochy a její tuhosti.
- 5) Konfrontovat výstupy vytvořených modelů s dostupnými experimentálními daty.

Seznam literatury:

Anderson, T. L. (2005), Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition, Taylor & Francis.

ANSYS Inc (2015), ANSYS Release 16.2 User's Manual, Swanson Analysis Sys. Inc, Pennsylvania.

Johnson, K. L. (1989), Contact Mechanics, vol. 69, 452 pp., Cambridge University Press, Cambridge.

Wade, J., S. Ghosh, P. Claydon, and H. Wu (2015), Contact damage of silicon carbide ceramics with different grain structures measured by Hertzian and Vickers indentation, Journal of the European Ceramic Society, 35, 1725-1736.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 3. 11. 2016



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou kontaktního porušování keramických materiálů. Cílem této práce je vytvořit analytický a numerický MKP model kontaktu kulová plocha vs. rovná deska a dále tyto modely využít k analýze zátěžných podmínek vedoucích ke vzniku trhliny v keramické desce. V rešeršní části jsou popsány projevy kontaktního porušení u keramických materiálů s důrazem na popis tzv. Hertzovy trhliny, dále je zde uvedena Hertzova teorie kontaktu kulová plocha vs. kulová plocha včetně vztahů popisujících napjatost v rovné desce. Následně je popsán princip modelování kontaktních úloh v MKP softwaru ANSYS Mechanical APDL a nakonec jsou zde uvedeny základní vztahy lomové mechaniky nutné k popisu iniciace prstencové trhliny. V další kapitole je popsána tvorba analytického a numerického MKP modelu kontaktní úlohy s ukázkami výstupů jednotlivých modelů, které jsou následně vzájemně porovnány. Poslední kapitola této práce se zabývá popisem modelu simulujícím iniciaci prstencové trhliny. V této kapitole je dále analyzována nejvýhodnější poloha pro vznik trhliny a její další růst. V poslední části je zpracována parametrická studie závislosti kritických zátěžných podmínek na poloměru vlačované kulové plochy při uvažování různých materiálových charakteristik keramické desky. Na závěr jsou výstupy výše uvedeného modelu porovnány s reálnými experimenty.

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with contact damage of ceramic materials. The purpose of this work is to create an analytical and FEM model of contact between a sphere and flat plate and subsequently use these models to analyse loading conditions that lead to crack initiation in the ceramic plate. The research part contains description of contact failures in ceramic materials with strong emphasis on Hertzian cone crack, followed by Hertzian theory of contact between two spheres and Hertzian stress field equations for flat plate. The next part of research chapters describes how contact problems are modelled in FEM software ANSYS Mechanical APDL and introduces the basics of fracture mechanics, which are necessary for the prediction of ring crack initiation. The next chapter contains information about the creation of analytical and FEM model and includes illustrative results of both models, which are then compared between these two models. The last chapter of this work deals with fracture mechanics FEM model that can simulate the ring crack initiation. This chapter also contains analysis of ideal crack position, where the crack has the best conditions for its initiation and growth. The last part of this chapter contains parametrical study where critical loading conditions are analysed in relation to radius of indentation sphere and different mechanical properties of used ceramic plate. In the final part of this work, the results of fracture mechanics FEM model are compared to experimental results of real specimens.

KLÍČOVÁ SLOVA

Hertzův kontakt, Hertzova trhlina, iniciace trhliny, metoda konečných prvků

KEYWORDS

Hertzian contact, Hertzian cone crack, crack initiation, finite element method

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

MACHŮ, Z. *Modelování a analýza kontaktního porušování keramických materiálů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 44 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením Ing. Oldřicha Ševečka, Ph.D. s využitím uvedené literatury.

V Brně, dne 26. května 2017



.....
Zdeněk Machů

PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych tímto poděkovat svému vedoucímu Ing. Oldřichu Ševečkovi, Ph.D. za jeho skvělé odborné vedení, cenné rady, inspirativní nápady a přátelský přístup.

OBSAH

1	Úvod.....	9
2	Druhy projevu kontaktního porušování.....	10
2.1	Hertzův kontakt a Hertzova trhlina	10
2.2	Kontakt ne-Hertzova typu a způsob porušení v jeho okolí	11
3	Nástroje a metody pro řešení problému	12
3.1	Mechanika kontaktů.....	12
3.1.1	Hertzova teorie kontaktu kulová plocha vs. kulová plocha	12
3.1.2	Řešení kontaktního problému pomocí MKP softwaru ANSYS Mechanical APDL.....	15
3.2	Lomová mechanika	16
3.2.1	Lineárně elastická lomová mechanika (LELM)	16
3.2.1.1	Energetický přístup	16
3.2.1.2	Napětíový přístup	17
3.2.2	Sdružené napětíově-energetické kritérium pro vznik trhliny	18
4	2D modely kontaktu rovinná deska vs. kulová plocha a analýza napjatosti v okolí kontaktu	19
4.1	Analytický model.....	19
4.1.1	Popis MATLAB programu a vykreslení napjatosti	20
4.1.1.1	Napětíová pole.....	20
4.1.1.2	Napětí na povrchu desky a podél osy z	22
4.2	Numerický MKP model	24
4.2.1	Popis numerického modelu	24
4.2.2	Provedení citlivostní analýzy.....	26
4.2.3	Výsledky numerického modelu	27
4.3	Porovnání výstupů analytického a numerického modelu	28
5	Predikce vzniku trhliny v okolí kontaktu.....	31
5.1	Model simulující iniciaci Hertzovy trhliny	31
5.1.1	Popis modelu	31
5.1.2	Studie ideálního místa pro iniciaci trhliny.....	33
5.2	Parametrická studie závislosti kritické síly na velikosti kulové plochy	35
5.3	Porovnání výstupu vytvořeného modelu s dostupnými experimentálními daty.....	38
6	Závěr.....	40
	Seznam obrázků a tabulek	41
	Seznam symbolů a zkratk.....	42
	Reference	43

1 ÚVOD

Od strojních součástí vyžadujeme, aby byly v jistých předem specifikovaných podmínkách schopny plnit svůj účel – proto musí být vyrobeny z materiálu, který je schopen kombinací rozličných vlastností vyhovět provozním podmínkám. Pokud je např. vyžadována vysoká odolnost vůči abrazi, oxidaci, teplotě a zároveň nízká hmotnost, pak se nabízí danou součást vyrobit např. z keramiky.

Pod pojmem keramika se rozumí nekovový materiál anorganického původu, který se vyrábí procesem slinování. První keramické materiály byly využívány již ve starověku na stavbu mostů nebo výrobu nádobí. V současnosti jsou využívány v mnoha průmyslových odvětvích, jako je např. elektrotechnika (keramické elektro součástky), dále se lze s nimi setkat v automobilovém průmyslu v podobě brzdových destiček nebo různých dílů pro motory, v hutním průmyslu jako válce válcovacích stolic, v kosmonautice jako materiály pro různé tepelné štíty, v medicíně jako zubní náhrady nebo náhrady kostí (viz Obr. 1.1) - [1]. V neposlední řadě se lze s nimi setkat v podobě komponent pro keramická ložiska. Širší použití keramiky je omezeno její značnou křehkostí, která se nejčastěji projeví u rázového, ohybového nebo tahového zatížení.

Dalším ze specifických problémů může být porušení povrchu keramické součásti v důsledku kontaktu s jiným tělesem, vedoucí k nevratnému poškození a vyřazení součásti z provozu, což bude zároveň i předmětem studia v rámci této bakalářské práce. Ta se detailněji věnuje výpočtovému modelování kontaktního porušení křehkých materiálů. Cílem práce je vytvořit jak analytický model, tak i numerickou simulaci kontaktu tuhá/poddajná kulička vs. keramická deska v MKP softwaru ANSYS a následně tyto modely, společně se základními nástroji lomové mechaniky, využít pro predikci kritických zátěžných podmínek, vedoucích k nevratnému poškození povrchu keramické desky trhlinou.



Obr. 1.1 Aplikace keramických materiálů [2, 3, 4]

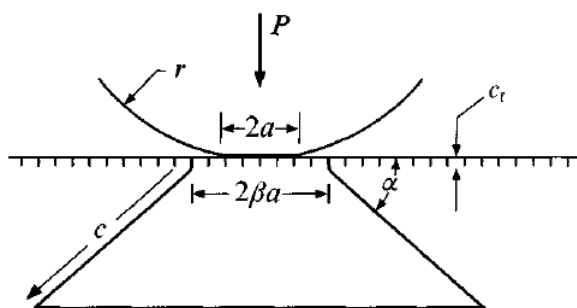
2 DRUHY PROJEVU KONTAKTNÍHO PORUŠOVÁNÍ

2.1 Hertzův kontakt a Hertzova trhlina

U keramických materiálů se vyskytují dva zcela odlišné projevy kontaktního poškození, jež jsou způsobeny kontaktem s kulovou plochou (jedná se o případ Hertzova kontaktu):

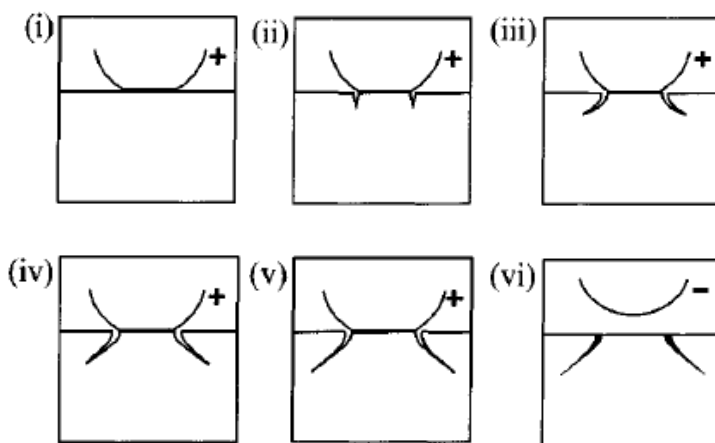
- vznik trhliny s charakteristickým kuželovitým tvarem (viz Obr. 2.1) (v angl. literatuře je známá pod pojmem „Hertzian cone crack“ – v textu dále jako Hertzova trhlina);
- vznik kvazi-plastické deformace těsně pod místem kontaktu.

Výše zmíněné projevy jsou podle [5] silně závislé na mikrostruktuře použitého materiálu. Keramické materiály, které jsou monokrystalické nebo polykrystalické s jemnozrnnou strukturou, vykazují vznik Hertzovy trhliny, kdežto u polykrystalického materiálu s hrubozrnnou strukturou bude spíše vznikat kvazi-plastická deformace. Tato práce se zabývá iniciační fází Hertzovy trhliny.



Obr. 2.1 Hertzova trhlina [6]

Hertzova trhlina je typ poškození, který se projevuje u vysoce křehkých materiálů, u nichž je hodnota lomové houževnatosti neměnná. Hertzova trhlina vzniká z defektů, které se nachází na povrchu součásti. Na Obr. 2.2 je znázorněn mechanismus jejího vzniku.

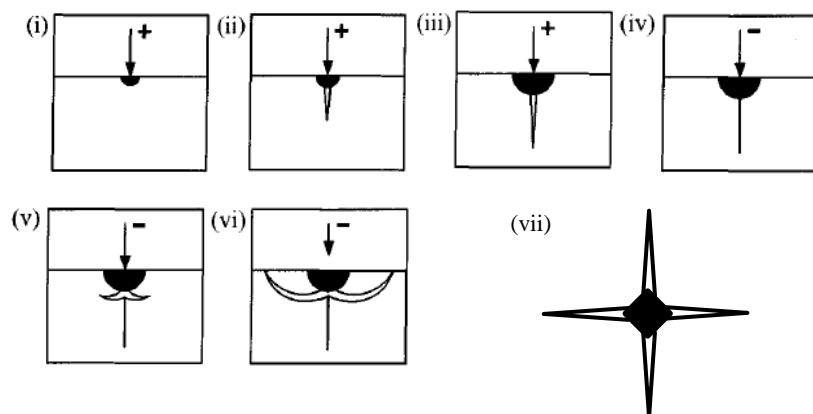


Obr. 2.2 Jednotlivé fáze vzniku Hertzovy trhliny [6]

V první fázi je indentor kulového tvaru vtlačován do rovné desky a dochází ke zdeformování povrchů těles. Přímo v oblasti kontaktu vznikají tlaková napětí, ale mimo kontaktní oblast vznikají napětí tahová. Ve druhé fázi vhodně orientované defekty pod vlivem výše zmíněných tahových napětí přerostou do trhliny ve tvaru prstence (v angl. literatuře známá pod pojmem „ring crack“); tato trhlina tvoří zárodek Hertzovy trhliny. Ve třetí fázi se trhlina pod účinkem rostoucího zatížení šíří stabilně kolmo dolů, dokud zatížení nedosáhne kritické velikosti. Po překročení kritické hodnoty zatížení dochází ke čtvrté fázi – kolmé šíření prstencové trhliny je nahrazeno jejím rozvětvením do tvaru kužele, čímž vzniká Hertzova trhlina. Při dalším zvětšování zátěže v páté fázi se tato trhlina šíří stabilně; musí být dodržena podmínka, že okraje původní prstencové trhliny neleží uvnitř kontaktní oblasti (musí zde působit tahové napětí). Po odlehčení se trhlina uzavře - [6].

2.2 Kontakt ne-Hertzova typu a způsob porušení v jeho okolí

Za zmínku stojí i použití indentorů ostrých tvarů (např. diamantový jehlan, který se používá při Vickersově zkoušce tvrdosti), u kterých je projevem kontaktního poškození vznik trhliny, která se během zatěžovací fáze šíří ve směru zatížení a je doprovázena vznikem oblasti s trvalou deformací (viz Obr. 2.3, tmavá oblast pod vektorem zatížení). Po odlehčení se trhlina v původním směru uzavírá, ale kvůli zbytkové tahové napjatosti se začne šířit do strany; v angl. literatuře je tato trhlina označena pojmem „radial-median and lateral crack“ - [6].



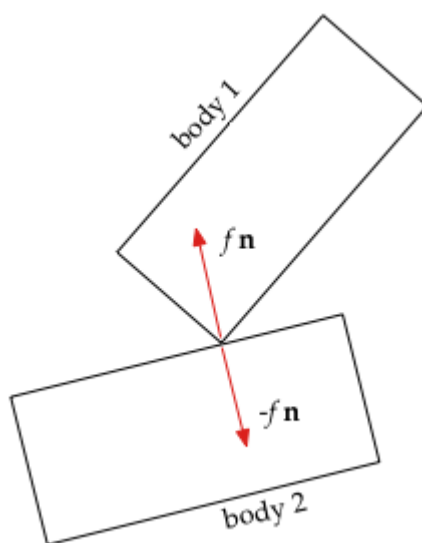
Obr. 2.3 Vznik trhliny při použití ostrého indentoru [6]: (i) až (vi) – Jednotlivé fáze vzniku trhliny; (vii) – Pohled na trhlinu seshora

3 NÁSTROJE A METODY PRO ŘEŠENÍ PROBLÉMU

Kapitola 3.1 se zabývá vztahy, kterými lze vyjádřit napjatost v keramické desce při použití kulového indentoru, a na jakém principu funguje modelování kontaktních úloh v MKP softwaru ANSYS. V kapitole 3.2 jsou uvedeny základní vztahy lomové mechaniky, které jsou potřebné k predikování vzniku prstencové trhliny.

3.1 Mechanika kontaktů

Pojem kontakt lze definovat jako situaci, kdy se povrchy dvou různých těles vzájemně dotýkají. K hlavním charakteristikám kontaktu mezi tělesy patří, že tělesa jsou neprostupná a působí na sebe pouze normálovými tlakovými silami, případně tečnými třecími silami - [7].



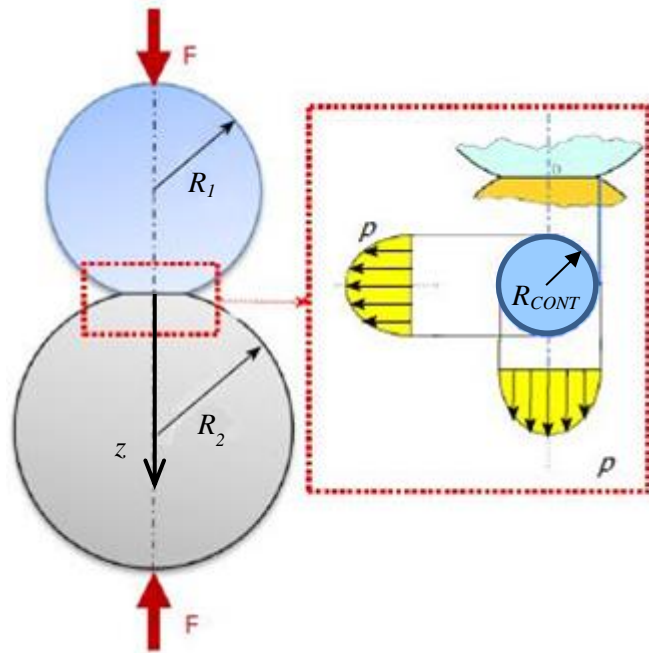
Obr. 3.1 Příklad kontaktu [8]

V této práci je použita Hertzova teorie kontaktu kulové plochy s druhou kulovou plochou. Aby použití této teorie bylo oprávněné, musí dle [9] platit následující předpoklady:

- rozměry kontaktní oblasti musí být řádově menší než rozměry samotných těles a poloměry jejich křivosti;
- deformace v oblasti kontaktu jsou malé;
- povrchy těles musí být dokonale hladké – nesmí dojít k vzájemnému tření povrchů.

3.1.1 Hertzova teorie kontaktu kulová plocha vs. kulová plocha

Nechť je dána koule o poloměru R_1 , která je volně položena na kouli s poloměrem R_2 . Obě tělesa jsou v klidu, ve statické rovnováze. Pokud na koule nepůsobí žádná síla, pak se kontakt mezi tělesy uskutečňuje v jediném bodě. Jakmile na koule začne působit síla o velikosti F podle Obr. 3.2, pak dochází k vratné deformaci povrchů obou těles v místě kontaktu a síla F se mezi tělesy přenáší prostřednictvím kontaktního tlaku p , jenž působí v kruhové oblasti s poloměrem R_{CONT} - [9].



Obr. 3.2 Kontakt dvou kulových ploch s rozložením kontaktního tlaku [10]

Závislost intenzity kontaktního tlaku p na vzdálenosti od osy z lze popsat následujícím vztahem uvedeným v [9]:

$$p(r) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_{CONT}^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1)$$

kde p_0 je maximální velikost kontaktního tlaku, r je vzdálenost od osy z .

Poloměr kontaktní oblasti R_{CONT} a maximální velikost kontaktního tlaku p_0 lze vyjádřit pomocí následujících vztahů uvedených v [11] (vztahy lze použít pro kontakt typu koule-koule a koule-deska, pokud za R_1 nebo R_2 dosadíme hodnotu ∞):

$$R_{CONT} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F \cdot \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)}{4 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}}, \quad (3.2)$$

$$p_0 = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot R_{CONT}^2}, \quad (3.3)$$

kde E_1 , resp. E_2 jsou hodnoty modulu pružnosti v tahu materiálu prvního, resp. druhého tělesa, μ_1 , resp. μ_2 jsou hodnoty Poissonova poměru pro materiál prvního, resp. druhého tělesa.

Napjatost na povrchu desky ($z = 0$) v cylindrickém souřadném systému lze popsat následujícími vztahy, které byly převzaty z [9]:

$$\frac{\sigma_z(r)}{p_0} = -\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_{CONT}}\right)^2}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\theta(r)}{p_0} = & -\frac{1 - 2 \cdot \mu}{3} \cdot \left(\frac{R_{CONT}}{r}\right)^2 \cdot \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{r}{R_{CONT}}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} - 2 \cdot \mu \\ & \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_{CONT}}\right)^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r(r)}{p_0} = & \frac{1 - 2 \cdot \mu}{3} \cdot \left(\frac{R_{CONT}}{r}\right)^2 \cdot \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{r}{R_{CONT}}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \\ & - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_{CONT}}\right)^2}, \end{aligned} \quad r \leq R_{CONT} \quad (3.6)$$

$$\frac{\sigma_r(r)}{p_0} = -\frac{\sigma_\theta(r)}{p_0} = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{3} \cdot \left(\frac{R_{CONT}}{r}\right)^2, \quad r > R_{CONT} \quad (3.7)$$

kde μ je Poissonův poměr materiálu desky, σ_r je napětí v radiálním směru, σ_θ je napětí v tečném směru, σ_z je napětí ve směru osy z .

Pro vyjádření napjatosti podél osy z ($r = 0$) platí následující vztahy podle [9]; tato napětí jsou zároveň hlavními napětími:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r(z)}{p_0} = \frac{\sigma_\theta(z)}{p_0} = & -(1 + \mu) \cdot \left[1 - \frac{z}{R_{CONT}} \cdot \arctg\left(\frac{R_{CONT}}{z}\right) \right] + \frac{1}{2} \\ & \cdot \left[1 + \left(\frac{z}{R_{CONT}}\right)^2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{\sigma_z(z)}{p_0} = -\left[1 + \left(\frac{z}{R_{CONT}}\right)^2 \right]^{-1}, \quad (3.9)$$

kde z je vzdálenost od povrchu desky, μ je Poissonův poměr materiálu desky.

Pro vyjádření napjatosti v libovolném bodě desky jsou k dispozici vztahy z [12]. Nejprve je nutné nadefinovat redukované souřadnice polohy: $R_{red} = \frac{r}{R_{CONT}}$, $Z_{red} = \frac{z}{R_{CONT}}$; dále se nadefinuje pomocná proměnná L :

$$L = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(R_{red}^2 + Z_{red}^2 - 1 + \sqrt{(R_{red}^2 + Z_{red}^2 - 1)^2 + 4 \cdot Z_{red}^2} \right)}. \quad (3.10)$$

Vztahy pro vyjádření napjatosti v cylindrickém souřadném systému pro libovolný bod na desce mají následující tvar (konstanta μ v násled. vztazích je Poissonův poměr materiálu desky):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r(R_{red}, Z_{red})}{p_0} = & -\frac{L^3 \cdot R_{red}^2 \cdot Z_{red}}{(L^4 + Z_{red}^2) \cdot (1 + L^2)^2} - (1 - 2 \cdot \mu) \\ & \cdot \left[\frac{Z_{red}}{L \cdot (1 + L^2)} - \frac{1}{3 \cdot R_{red}^2} \cdot \left(1 - \frac{Z_{red}^3}{L^3} \right) \right] + \frac{Z_{red}}{L} \\ & \cdot \left[L \cdot (1 + \mu) \cdot \arctg\left(\frac{1}{L}\right) - (1 - \mu) \cdot \frac{L^2}{(1 + L^2)} - 2 \cdot \mu \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\theta(R_{red}, Z_{red})}{p_0} = & -\frac{1 - 2 \cdot \mu}{3 \cdot R_{red}^2} \cdot \left[1 - \frac{Z_{red}^3}{L^3} \right] + \frac{Z_{red}}{L} \\ & \cdot \left[L \cdot (1 + \mu) \cdot \arctg\left(\frac{1}{L}\right) - (1 - \mu) \cdot \frac{L^2}{1 + L^2} - 2 \cdot \mu \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{\sigma_z(R_{red}, Z_{red})}{p_0} = -\frac{Z_{red}^3}{L \cdot (L^4 + Z_{red}^2)}. \quad (3.13)$$

3.1.2 Řešení kontaktního problému pomocí MKP softwaru ANSYS Mechanical APDL

Kontaktní problémy patří do oblasti nelineárních úloh. Jejich řešení bývá značně složité, jelikož předem není známa kontaktní oblast ani chování samotného kontaktu. K jeho řešení je v práci využito MKP softwaru ANSYS.

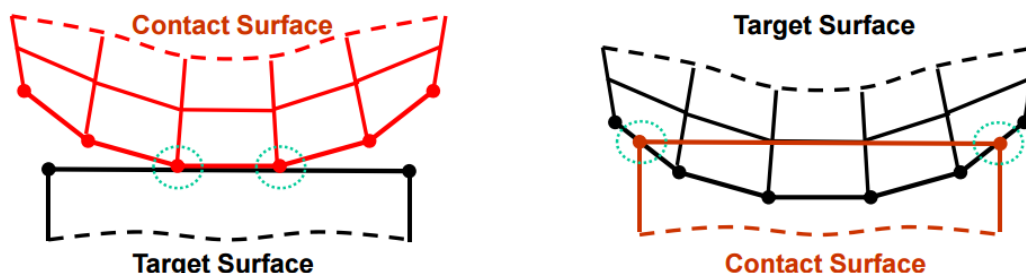
Kontaktní úlohy lze obecně rozdělit na dvě základní kategorie:

- styk tuhého tělesa s deformovatelným;
- styk dvou deformovatelných těles.

Tyto kontakty lze v MKP softwaru ANSYS podle [13] modelovat následujícími způsoby:

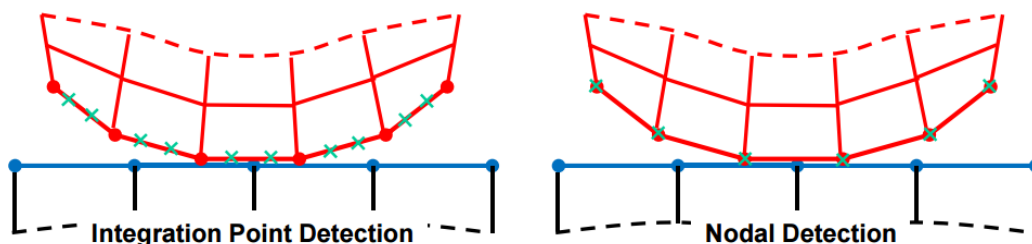
- uzel a uzel (node-to-node);
- uzel a povrch (node-to-surface);
- povrch a povrch (surface-to-surface);
- křivka a křivka (line-to-line);
- křivka a povrch (line-to-surface).

Zprostředkování kontaktu mezi tělesy se děje pomocí prvků typu *Contact* a *Target*. Pro tyto prvky platí, že *Contact* prvek nemůže projít skrze prvek *Target*. Na Obr. 3.3 je demonstrováno, že je důležité správně zvolit kombinaci dvojice *Contact-Target*.



Obr. 3.3 Prvky typu *Contact* a *Target* [7]

Detekce samotného kontaktu probíhá buď na uzlech, nebo v tzv. integračních bodech. Detekce na uzlech má výhodu v tom, že detekce kontaktu je přesnější (nemůže dojít k průniku těles na ostrých hranách), nicméně při použití lokálně zjemněné sítě je lepší využít integračních bodů, protože kontakt bude zaznamenán ve více bodech - [7].



Obr. 3.4 Způsoby detekce kontaktu [7]

3.2 Lomová mechanika

Lomová mechanika se zabývá chováním těles s trhlinou; lze ji rozdělit na lineárně elastickou a elasticko-plastickou. V této kapitole jsou uvedeny základní vztahy lineárně elastické lomové mechaniky a sdružené napětově-energetické kritérium, které bude využito pro predikci vzniku trhliny.

3.2.1 Lineárně elastická lomová mechanika (LELM)

Teorie LELM platí pouze pro případy, kdy velikost plastické zóny v kořeni trhliny je dostatečně malá, viz [14]. Pro posouzení chování tělesa s trhlinou se používá energetický a napětový přístup.

3.2.1.1 Energetický přístup

Energetický přístup je založen na myšlence, že při růstu trhliny o délce a dochází k uvolňování naakumulované deformační energie W_{el} . Při růstu ale vznikají nové povrchy a u tvárných materiálů dochází i k tvorbě plastické zóny v okolí kořene trhliny; tyto procesy naopak jistou energii W_S spotřebují - [15].

V energetickém přístupu byla Irwinem zavedena veličina známá jako hnací síla trhliny, která je v obecném tvaru definována následovně: $G = -\frac{dW_{el}}{da}$. Tato veličina má svou kritickou hodnotu G_C , jež se nazývá lomová houževnatost materiálu a je

materiálovou charakteristikou. Při dosažení této limitní hodnoty nastává mezní stav nestabilního šíření trhliny - [14].

Trhlina se šíří stabilně, pokud roste pouze při dalším zvyšování zátěžné síly. Po dosažení mezního stavu nestabilního šíření je růst trhliny nezávislý na vnějším zatížení, trhlina se v materiálu šíří rychlostí zvuku a dochází k meznímu stavu lomu.

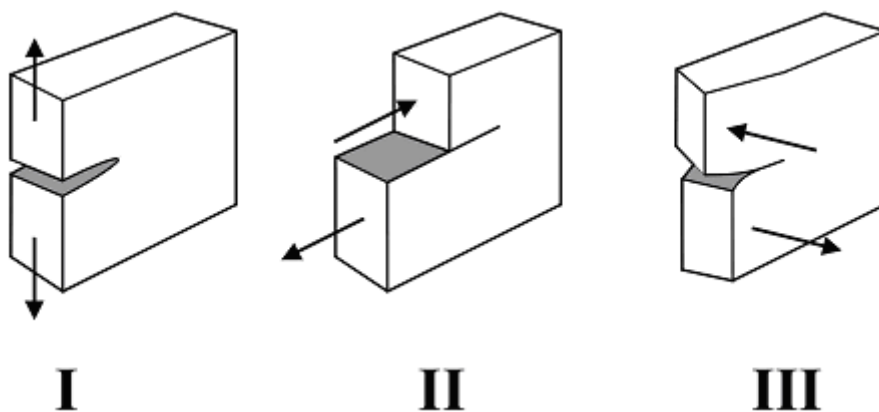
3.2.1.2 Napěťový přístup

Napěťový přístup je v inženýrské praxi využíván častěji nežli energetický přístup kvůli jednodušší aplikaci. Spočívá v myšlence, že napjatost a deformace v blízkém okolí kořene trhliny lze kvantifikovat jedinou veličinou, a to faktorem intenzity napětí K .

Při používání napěťového přístupu rozlišujeme tři základní zatěžovací módy (viz Obr. 3.5), které jsou označeny římskými číslicemi:

- normálový I;
- smykový II;
- stříhový (antirovinný) III.

Každý zatěžovací mód má svůj faktor intenzity napětí označený příslušným indexem, např. K_I pro normálový mód. Největší význam má právě mód I, protože se jedná (s ohledem na šíření trhliny) o nejnebezpečnější namáhání. Obecná zatížení lze vyjádřit kombinací výše uvedených módů - [14].



Obr. 3.5 Základní zatěžovací módy [16]

Pro faktor intenzity napětí K_I platí následující vztah:

$$K_I = \sigma_{\infty} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f\left(\frac{a}{w}\right), \quad (3.19)$$

kde σ_{∞} je nominální napětí v místě trhliny, a je délka trhliny, $f\left(\frac{a}{w}\right)$ je tvarová funkce, která charakterizuje rozložení pole napětí v okolí kořene trhliny a lze ji pro speciální typy těles a zatížení nalézt v literatuře ve formě analytických vztahů.

Obdobně jako pro hnací sílu trhliny existuje i u faktoru intenzity napětí kritická hodnota K_{IC} známá jako lomová houževnatost, která je zároveň materiálovou charakteristikou.

Mezi veličinami G_C a K_{IC} existuje jednoznačná závislost. Následující vztah platí pro rovinnou deformaci (rovinná deformace je trojosý stav napjatosti, při kterém platí, že se materiál může deformovat pouze ve dvou dimenzích) - [14]:

$$G_C = \frac{K_{IC}^2}{E} \cdot (1 - \mu^2). \quad (3.20)$$

3.2.2 Sdružené napětově-energetické kritérium pro vznik trhliny

V současnosti se lze v literatuře setkat i s tzv. sdruženým napětově-energetickým kritériem, které se ukazuje jako velmi slibné pro popis vzniku trhlin v křehkých materiálech. Predikce porušení pomocí něj vykazují velmi dobrou shodu s experimentálním pozorováním. Matematická formulace tohoto kritéria je popsána rovnicemi (3.21) uvedenými v [17]:

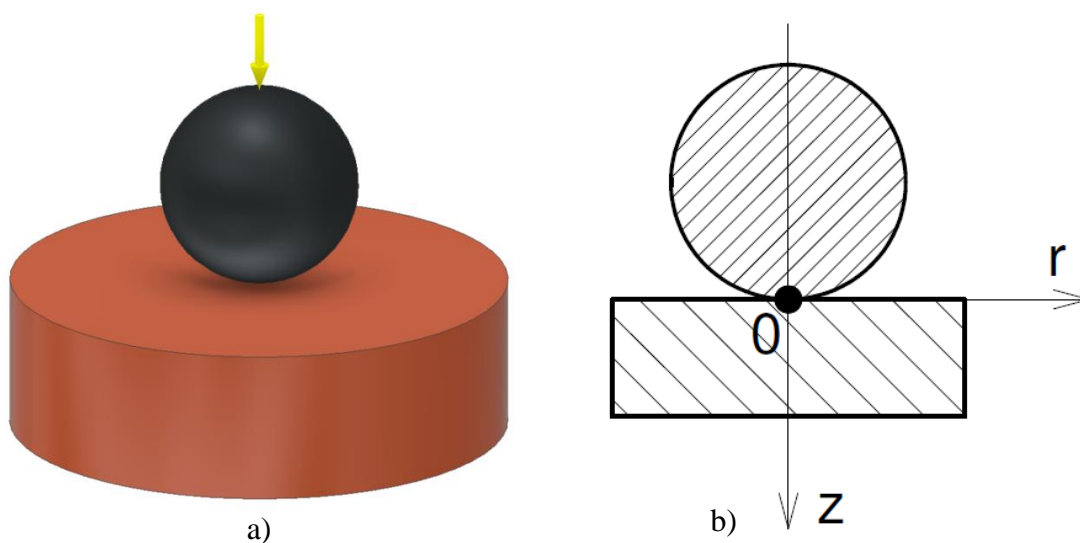
$$\begin{aligned} G_{inc} &\geq G_C, \\ \sigma_{nom} &\geq \sigma_C, \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde G_{inc} je přírůstková hnací síla trhliny, která je definována jako záporný rozdíl deformační energie v tělese bez trhliny a v tělese s trhlinou o délce a , podělený přírůstkem délky trhliny Δa ($G_{inc} = -\frac{W_{el}(0) - W_{el}(a)}{\Delta a}$); σ_{nom} je nominální napětí v potenciálním kořeni trhliny, σ_C je mez pevnosti v tahu.

Sdružené kritérium vyžaduje, aby v tělese bylo nashromážděno dostatečné množství energie ke vzniku trhliny a zároveň, aby v místě vzniku trhliny a podél cesty jejího šíření bylo dosaženo kritické hodnoty normálového tahového napětí odpovídající mezi pevnosti v tahu daného materiálu, viz [18]. Toto kritérium bývá většinou splněno poprvé pro nějakou nenulovou velikost přírůstku trhliny, tj. trhlina nevzniká postupným růstem z nulové velikosti, nýbrž skokově z nulové hodnoty na jistou kritickou délku a_{krit} , danou současným splněním podmínek v rovnici (3.21). Jakmile se trhlina vytvoří, její další chování je závislé již jen na aktuální hodnotě součinitele K_I v okolí jejího kořene. Tímto dalším chováním trhliny se již tato práce nezabývá, cílem je popsat pouze vznik samotné trhliny.

4 2D MODEL KONTAKTU ROVINNÁ DESKA VS. KULOVÁ PLOCHA A ANALÝZA NAPJATOSTI V OKOLÍ KONTAKTU

Tato kapitola se zabývá modelováním a řešením kontaktní úlohy deformovatelná/tuhá kulová plocha vs. deformovatelná deska dle Obr. 4.1a. V rámci této práce byl vytvořen analytický a numerický MKP model tohoto kontaktu. Hlavním cílem je popis napjatosti v jeho okolí, která bude jedním ze vstupů pro kritérium definující vznik prstencové, resp. Hertzovy trhliny.



Obr. 4.1 a) Typ řešené kontaktní úlohy; b) Souřadný systém použitý pro analytický model

4.1 Analytický model

Analytický model, který se řídí rovnicemi uvedenými v kapitole 3.1.1, byl vytvořen v programovém prostředí MATLAB. Jedná se o dva spouštěcí skripty (*Hertz.m* a *Hertz2015.m*) a 3 pomocné funkce (*Hertz3D.m*, *HertzT.m* a *folderMan.m*). Poslední soubor *crop_image.m* je přídatná funkce, která slouží k automatickému ořezávání vytvořených obrázků.

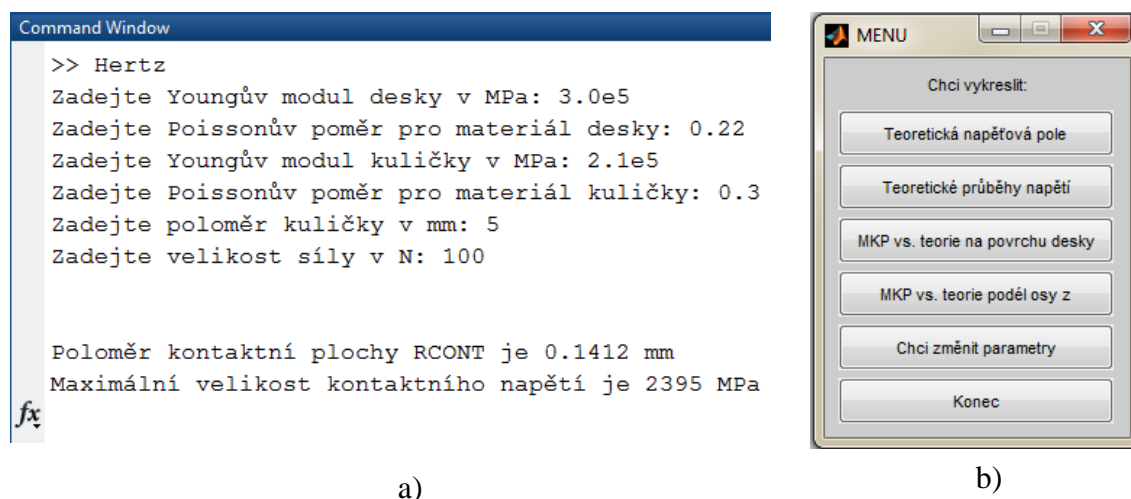
Program slouží k vykreslení průběhů jednotlivých napětí v celé desce (tzv. napět'ová pole), napětí na povrchu desky a podél osy z . Dále je v něm implementována možnost srovnávat analytické řešení s výstupy z numerického modelu. Model využívá souřadný systém dle Obr. 4.1b.

Ovládání modelu bylo navrženo tak, aby bylo co nejjednodušší a aby program sám ukládal jednotlivé grafy do předem určených složek. Pro srovnávání analytického řešení s numerickým je nutné nakopírovat soubory s výsledky numerického řešení do složky s m-skripty.

4.1.1 Popis MATLAB programu a vykreslení napjatosti

Analytický model se spouští pomocí skriptů *Hertz* a *Hertz2015*. První skript se používá pro verze MATLABu 2013 a starší, kdežto *Hertz2015* se používá pro novější verze programu, ve kterých se vyskytl problém s popisem grafů napěťových polí. Tento problém byl způsoben změnou grafického systému, viz [19].

Po načtení skriptu program po uživateli požaduje zadání parametrů kuličky a desky, ze kterých se pak pomocí rovnic (3.2) a (3.3) vypočítají hodnoty R_{CONT} a p_0 . Pro demonstraci fungování skriptu *Hertz* budou v následujících kapitolách použity vstupní parametry uvedené na Obr. 4.2a.



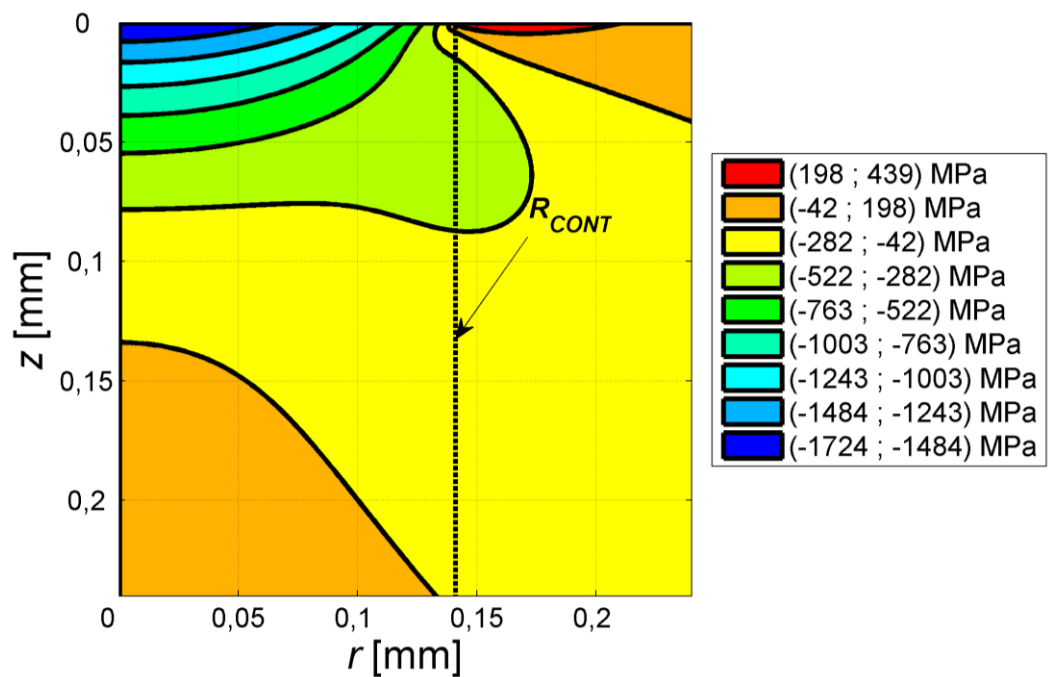
Obr. 4.2 Skript *Hertz*: a) Spuštění skriptu *Hertz* a nastavení parametrů; b) Dialogové okno skriptu *Hertz*

Po spuštění skriptu *Hertz* a zadání vstupních parametrů se na obrazovce objeví dialogové okno (viz Obr. 4.2b), ve kterém si uživatel vybere grafy, které chce vykreslit. Po vykreslení požadovaných veličin se dialogové okno obnoví a uživatel si může vykreslit jiné grafy. Program se ukončí pouze tehdy, když uživatel klikne na tlačítko „Konec“ nebo červený křížek. V dialogovém oknu se nachází i tlačítko „Chci změnit parametry“, které uživateli umožňuje měnit parametry, aniž by musel znovu spouštět celý skript.

4.1.1.1 Napěťová pole

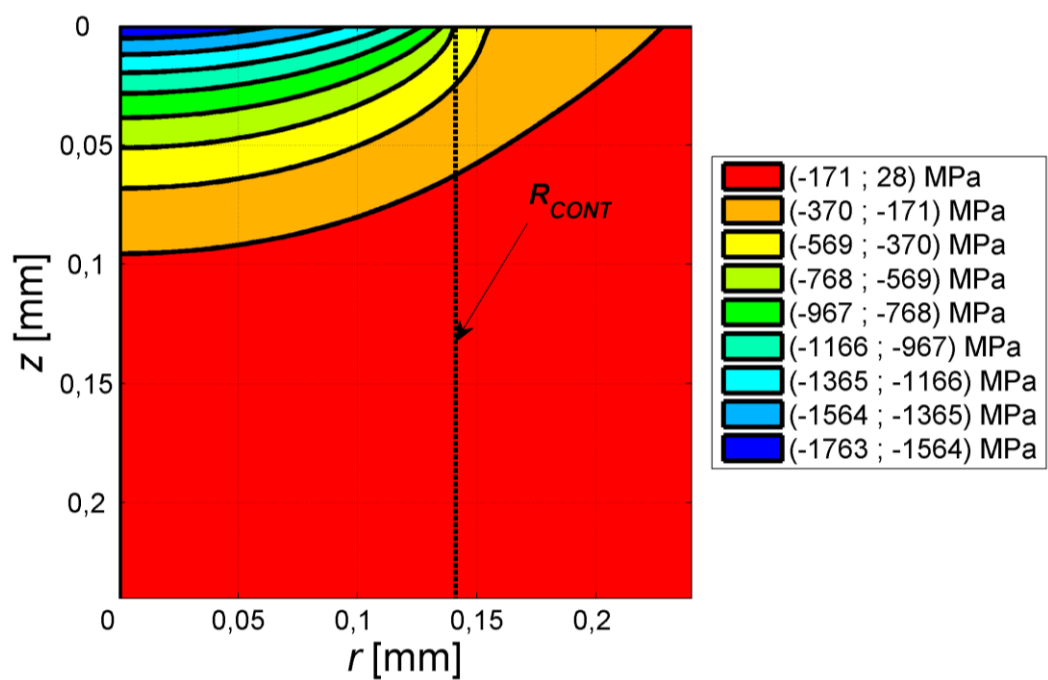
Při vykreslování napěťových polí v celé desce si MATLAB zavolá funkci *Hertz3D*, ve které jsou uloženy rovnice (3.10) až (3.13). Tato funkce uloží do proměnných hodnoty jednotlivých napětí v bodech desky o souřadnicích $[r;z]$. Grafy napěťových polí jsou následně vykresleny v různých oknech příkazem ***contourf*** a pomocí několika následujících příkazů vzhledově upraveny (styl textu, velikost popisků, tloušťka vrstevnic, barvy jednotlivých kontur) a uloženy do složky „PICTURES“.

Obr. 4.3 představuje typický tvar pole napětí σ_r . Minimum se nachází v počátku souřadného systému r - z , kdežto maximum je na povrchu desky ve vzdálenosti poloměru kontaktní oblasti R_{CONT} . Napětí σ_r jako jediné dosahuje vysokých kladných hodnot na povrchu desky, tudíž je příčinou vzniku prstencových trhlin.



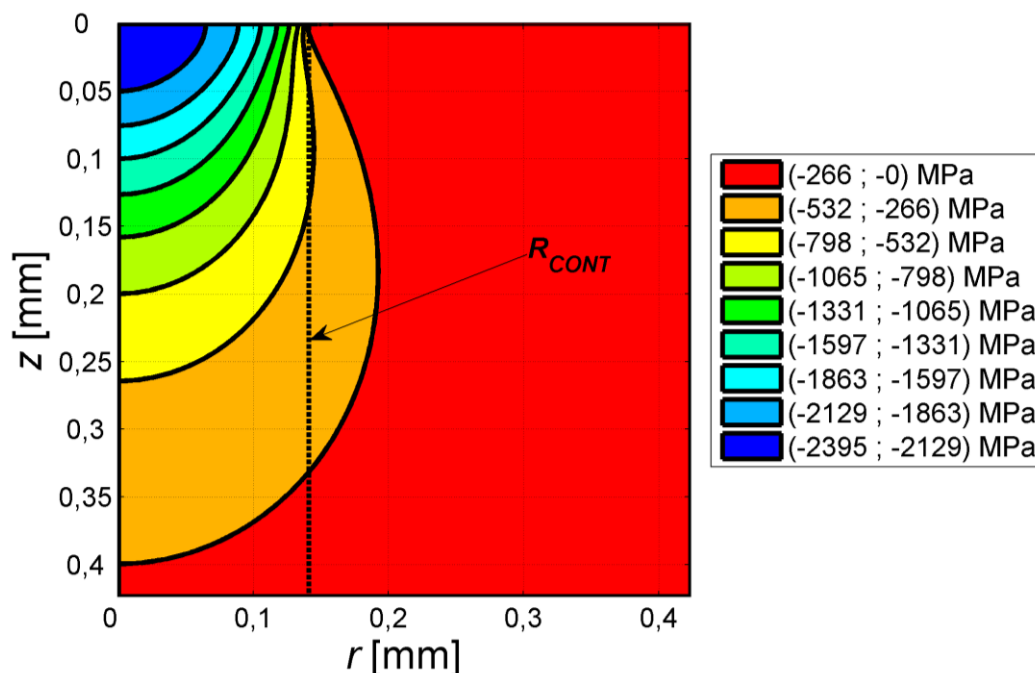
Obr. 4.3 Pole napětí σ_r

Na Obr. 4.4 je zobrazeno napěťové pole napětí σ_θ . Toto napětí nabývá svého minima v počátku souřadného systému r - z .



Obr. 4.4 Pole napětí σ_θ

Obr. 4.5 ukazuje rozložení napětí σ_z , které nabývá svého minima v počátku souřadného systému r-z.



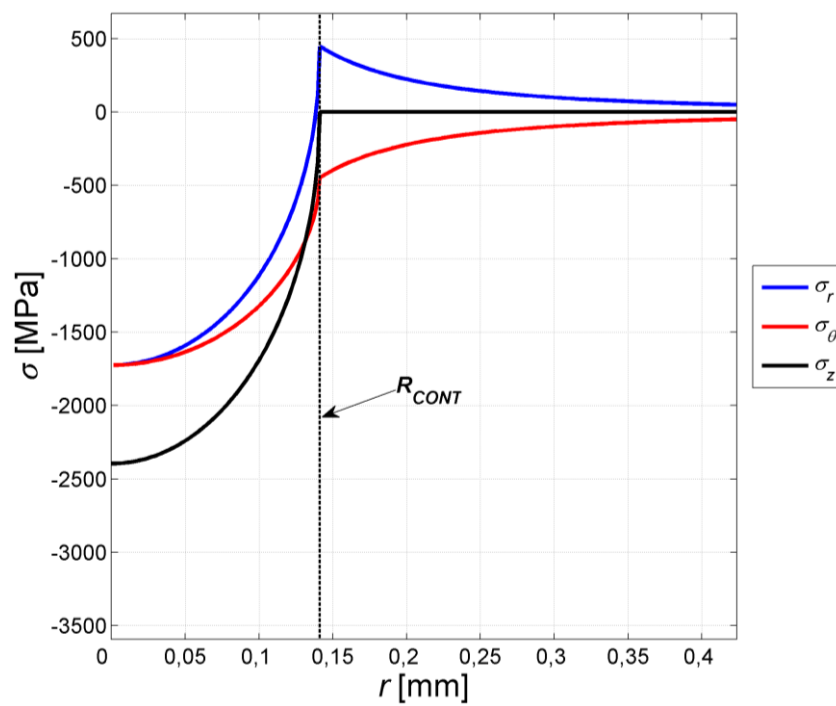
Obr. 4.5 Pole napětí σ_z

4.1.1.2 Napětí na povrchu desky a podél osy z

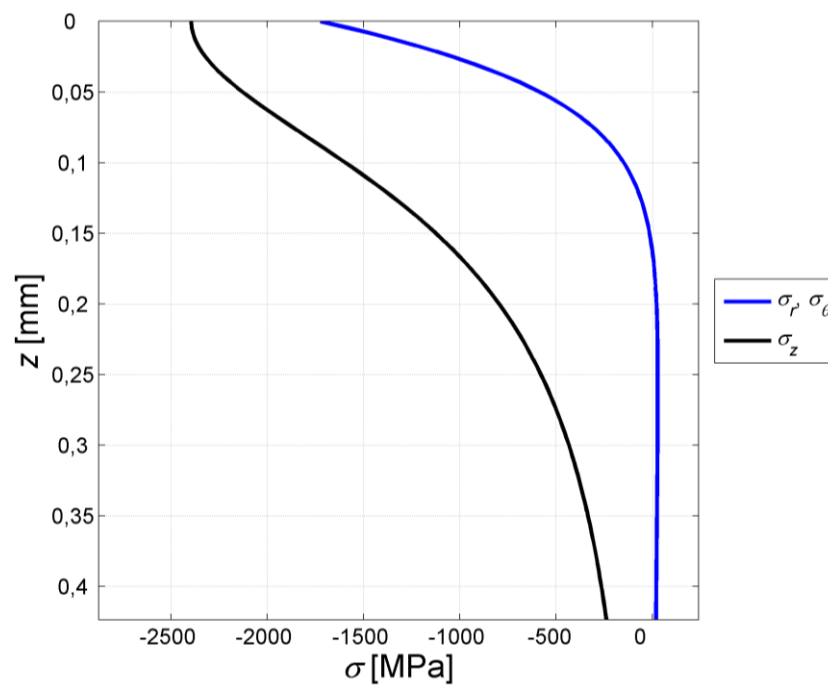
Pokud chce uživatel vykreslit průběhy napětí na povrchu desky a podél osy z, pak si program zavolá funkci *HertzT*, která pomocí rovnic (3.4) až (3.9) uloží průběhy jednotlivých napětí do proměnných. Následně jsou vykresleny dva grafy, jeden pro napětí na povrchu desky a druhý pro napětí podél osy z. Grafy jsou pomocí příkazů vzhledově upraveny a následně exportovány do složky „PICTURES“.

Na Obr. 4.6a je zobrazen průběh pro jednotlivá napětí na povrchu desky ($z = 0$). Kladných hodnot zde dosahuje pouze napětí σ_r . Zde je nutné upozornit na to, že napětí σ_r velmi prudce stoupá ke svému maximu v blízkém okolí vzdálenosti R_{CONT} . Nejnižší hodnotu má napětí σ_z a nachází se v počátku souřadného systému; jeho velikost je rovna maximální velikosti kontaktního tlaku. Dále je patrné, že napětí σ_r a σ_θ se asymptoticky blíží k nulové hodnotě.

Obr. 4.6b představuje průběhy napětí podél osy z ($r = 0$). Zde jsou všechna napětí záporná, napětí σ_r je totožné s napětím σ_θ . Nejnižší hodnota napětí σ_z je rovna maximální velikosti kontaktního tlaku a nachází se v počátku souřadného systému.



a)



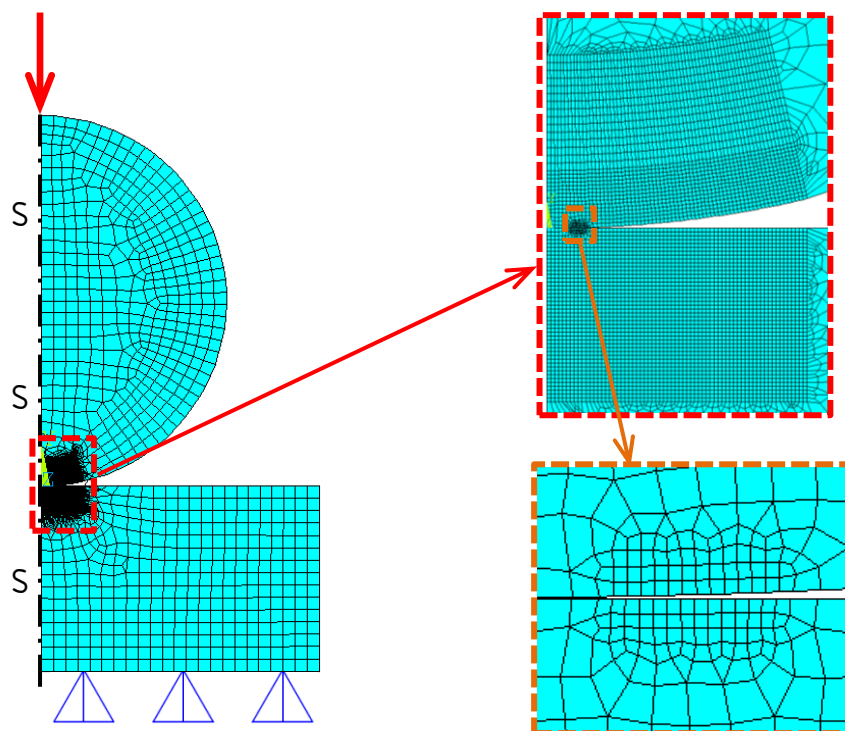
b)

Obr. 4.6 Výsledky analytického modelu: a) Průběhy napětí na povrchu desky;
b) Průběhy napětí podél osy z

4.2 Numerický MKP model

Numerický MKP model (viz Obr. 4.7) byl vytvořen ve studentské verzi programového prostředí ANSYS Mechanical APDL, jedná se o soubor *HContact.inp*.

Tvorba tohoto modelu vycházela ze souborů dostupných z [20]. Kontakt kulové plochy s deskou je zde modelován jako 2D úloha s osovou symetrií. Model je plně automatizován, stačí zadat vstupní parametry do výše uvedeného souboru a načíst jej pomocí příkazu */input*. Po provedení řešení se výsledky jednotlivých napětí na povrchu desky, resp. podél osy z , uloží do souborů *osaX.txt*, resp. *osaZ.txt*.



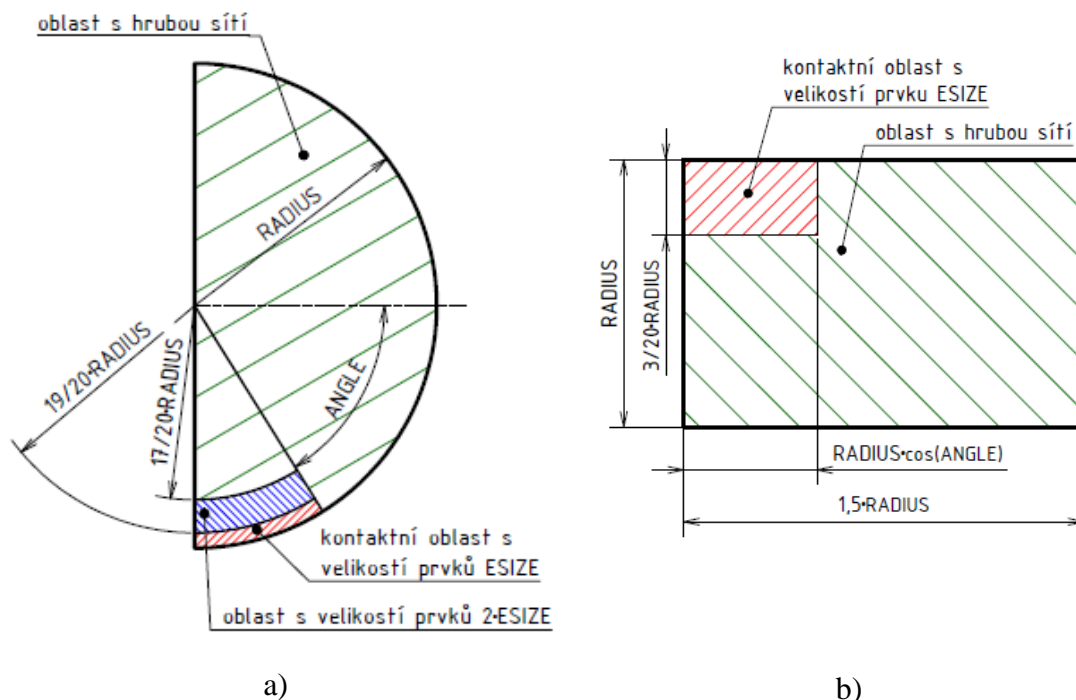
Obr. 4.7 MKP model kontaktní úlohy

4.2.1 Popis numerického modelu

Uživatel nejprve ve skriptu nastaví požadované vstupní parametry (rozměry, materiál a zatížení). Po načtení souboru se vypočítá poloměr kontaktní oblasti R_{CONT} pomocí rovnice (3.2) a vytvoří se MKP síť s následujícími prvky:

- PLANE183 – rovinný prvek s osově symetrickým chováním; použije se pro modelování kuličky i desky;
- CONTA172 – kontaktní prvek s chováním CLOSE GAP (zajistí, že mezi kuličkou a deskou nebude mezera); tento prvek obalí geometrii kuličky;
- TARGE169 – kontaktní prvek; tento prvek obalí geometrii desky.

Po vytvoření potřebných proměnných přistoupí program k tvorbě geometrie a sítě. Začíná se kuličkou, jejíž geometrie je upravena tak, aby se dosáhlo co nejjemnější sítě v předpokládané oblasti kontaktu a zároveň byl brán zřetel na horní omezení vzhledem k počtu uzlů ve studentské verzi. Geometrii kuličky vystihuje Obr. 4.8a.



Obr. 4.8 Geometrie MKP modelu: a) Geometrie kuličky; b) Geometrie desky

Program pokračuje tvorbou geometrie desky. Ta je opět navržena tak, aby v předpokládané oblasti kontaktu byla síť co nejjemnější. Geometrie desky je zobrazena na Obr. 4.8b. Zároveň je vhodné zajistit pravidelnou síť mezi kuličkou a deskou, v opačném případě může docházet k nepřesnému výpočtu kontaktního tlaku mezi tělesy.

Jakmile je vytvořena síť na obou tělesech, program pomocí příkazu **erefine** lokálně zjemní síť na povrchu obou těles v úzkém okolí na pozici R_{CONT} (viz detail na Obr. 4.7), jelikož dle analytického modelu lze v této oblasti očekávat rychlou změnu radiálního napětí v závislosti na souřadnici r a rovněž také jeho maximální hodnotu.

Následuje vytvoření kontaktní dvojice pomocí příkazu **esurf**, ta je tvořena uzly na okrajích těles s využitím prvků CONTA172 a TARGE169. V této fázi je model hotový a program přistoupí k realizaci okrajových podmínek. Desce je na spodní straně zamezeno pohybu ve svislém směru a na osu symetrie je předepsána symetrická okrajová podmínka (viz Obr. 4.7). Nakonec je na vrchol kuličky umístěn vektor zátěžné síly a následuje řešení kontaktní úlohy. Po vyřešení se hodnoty napětí σ_r , σ_θ , a σ_z na povrchu desky, resp. podél osy z , uloží do souborů *osaX.txt*, resp. *osaZ.txt*.

4.2.2 Provedení citlivostní analýzy

Citlivostní analýza byla provedena pro hodnoty uvedené v Tab. 1. Jedná se o stejné parametry jako na Obr. 4.2a.

Parametr	Hodnota
Poloměr kuličky (RADIUS)	5 mm
Youngův modul desky (YOUNGCER)	300 GPa
Youngův modul kuličky (YOUNGIND)	210 GPa
Poissonův poměr desky (MICER)	0,22
Poissonův poměr kuličky (MIIND)	0,3
Velikost zátěžné síly (FORCE)	100 N

Tab. 1 Parametry pro citlivostní analýzu

V citlivostní analýze byly zkoumány následující hodnoty v závislosti na velikosti prvků ESIZE a velikosti prvků v oblasti s lokálně zjemněnou sítí:

- minimální hodnota σ_r ,
- maximální hodnota σ_r ,
- maximální velikost kontaktního tlaku p_0 ,
- doba výpočtu (od spuštění skriptu až do konce výpočtu; provedeno na jednom jádru počítače s procesorem Intel® Core™2 Duo E8400).

Výsledky citlivostní analýzy jsou uvedeny v Tab. 2.

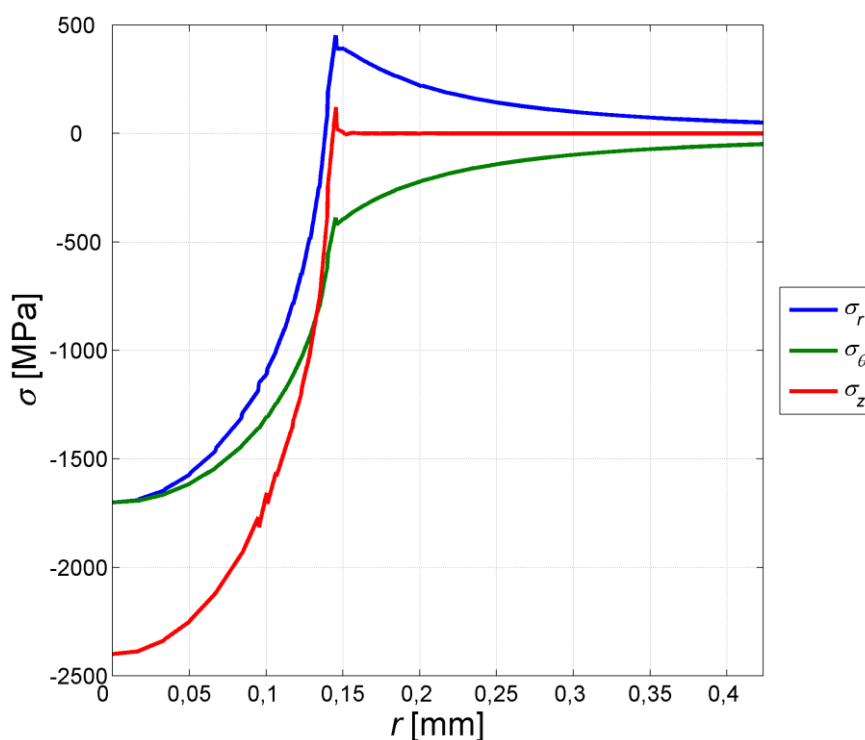
Hodnota ESIZE [μm]	Velikost prvků v oblasti σ_{rmax} [μm]	σ_{rmin} [MPa]	σ_{rmax} [MPa]	p_0 [MPa]	t [s]
50	15,8	-1658	335	2367	24,4
40	12,9	-1668	377	2396	30,2
30	10,0	-1684	383	2395	40,3
20	6,6	-1698	390	2397	69,8
18	5,8	-1703	403	2395	74,2
17	5,5	-1701	427	2398	79,5
15	5,1	-1705	423	2396	112,6
12,5	4,0	-1707	423	2396	145,8

Tab. 2 Výsledky citlivostní analýzy

Citlivostní analýza prokázala, že nejvíce citlivá na velikost prvků je maximální hodnota napětí σ_{rmax} . Podle výsledků citlivostní analýzy bude v modelu použita hodnota parametru $ESIZE = 17 \cdot 10^{-3}$ mm, jelikož se hodnota maximálního napětí σ_{rmax} při dalším snížení velikosti prvků již významně nemění.

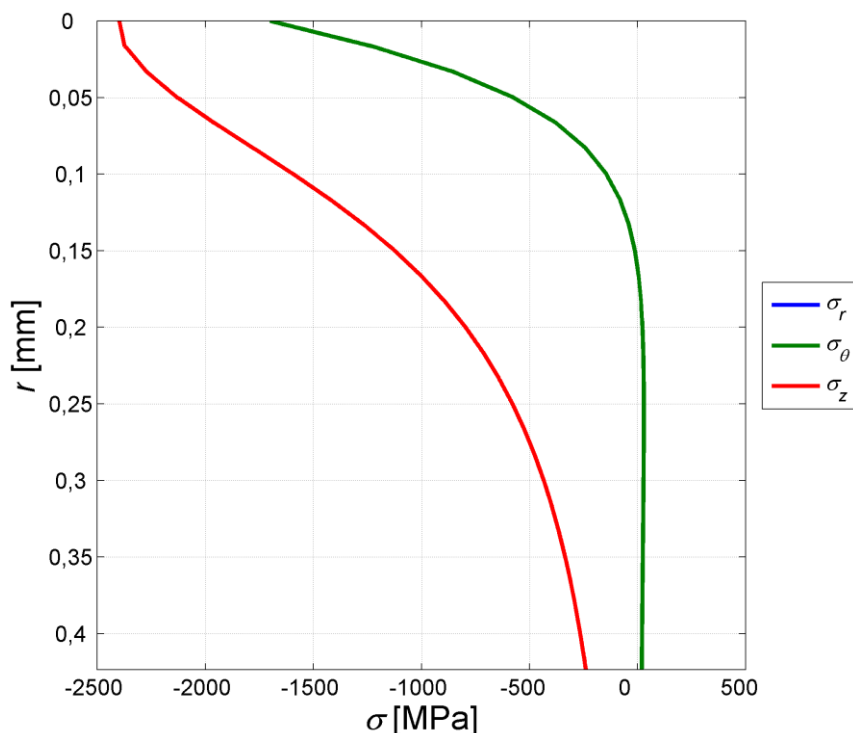
4.2.3 Výsledky numerického modelu

Na Obr. 4.9 jsou zobrazeny výsledky napětí na povrchu desky. Byly použity parametry podle Tab. 1 s hodnotou $ESIZE = 17 \cdot 10^{-3}$ mm. V úzkém okolí maximální hodnoty σ_r lze vidět skokovou změnu hodnot; ta je způsobena tím, že se zde velice rychle mění hodnoty napětí a použité prvky jsou na přesnější popis napětí v této oblasti ještě stále příliš velké. Další zjemnění v této oblasti by mohlo tento skok odstranit, avšak toto není pro další analýzy zapotřebí.



Obr. 4.9 Průběhy napětí na povrchu desky

Obr. 4.10 ukazuje průběhy napětí podél osy z. Lze vidět pouze dvě křivky, protože jak ukazuje vztah (3.8), napětí σ_r a σ_θ jsou totožná.



Obr. 4.10 Průběhy napětí podél osy z

4.3 Porovnání výstupů analytického a numerického modelu

Pro srovnání výstupů obou modelů je nutné nakopírovat soubory z numerického modelu *osaX.txt* a *osaZ.txt* do složky s m-skripty. Po spuštění skriptu *Hertz* v MATLABu lze vybrat buďto možnost „MKP vs. teorie na povrchu desky“, nebo „MKP vs. teorie podél osy z“.

Po kliknutí na výše uvedené možnosti MATLAB nejprve zkontroluje, zda je schopen najít soubor *osaX.txt*, resp. *osaZ.txt*. Pokud ne, pak uživatele vyzve ke kontrole, zda se soubory skutečně nachází ve složce s m-skripty.

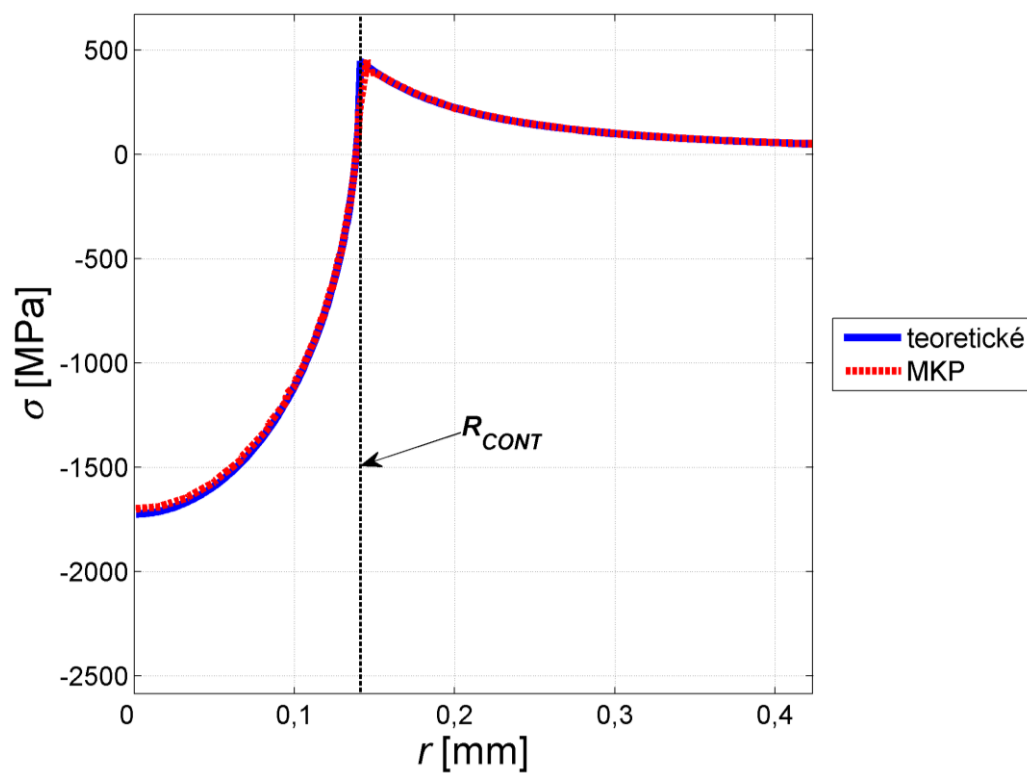
```
Command Window
>> Hertz

Poloměr kontaktní plochy je 0.1412 mm
Maximální velikost kontaktního napětí je 2395 MPa
Nemůžu najít soubor osaX.txt; prosím zkontrolujte, zda se soubor nachází v adresáři s m-skriptem.
```

Obr. 4.11 Příkazové okno MATLABu – kontrola existence vstupních souborů

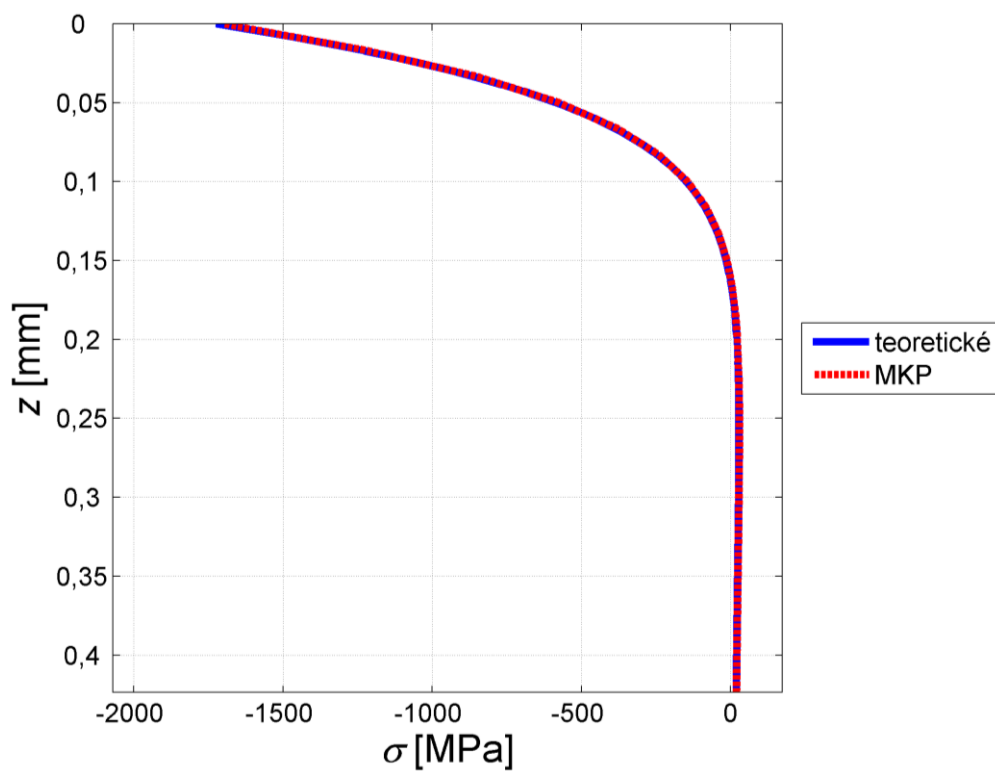
Po nalezení potřebných souborů z MKP modelu si MATLAB pomocí příkazu **importdata** načte do proměnných hodnoty numerických napětí a pozice příslušných bodů. Následuje volání funkce *HertzT*, která uloží do paměti hodnoty teoretických napětí. Nakonec jsou jednotlivá napětí vykreslena do grafů.

Na Obr. 4.12 je srovnáno napětí σ_r mezi analytickým a numerickým modelem na povrchu desky. Lze vidět, že numerické řešení kopíruje analytické řešení a mírně se odlišuje pouze v okolí středu kontaktu a v místě maximálního tahového napětí (okolí R_{CONT}).



Obr. 4.12 Srovnání napětí σ_r mezi modely na povrchu desky

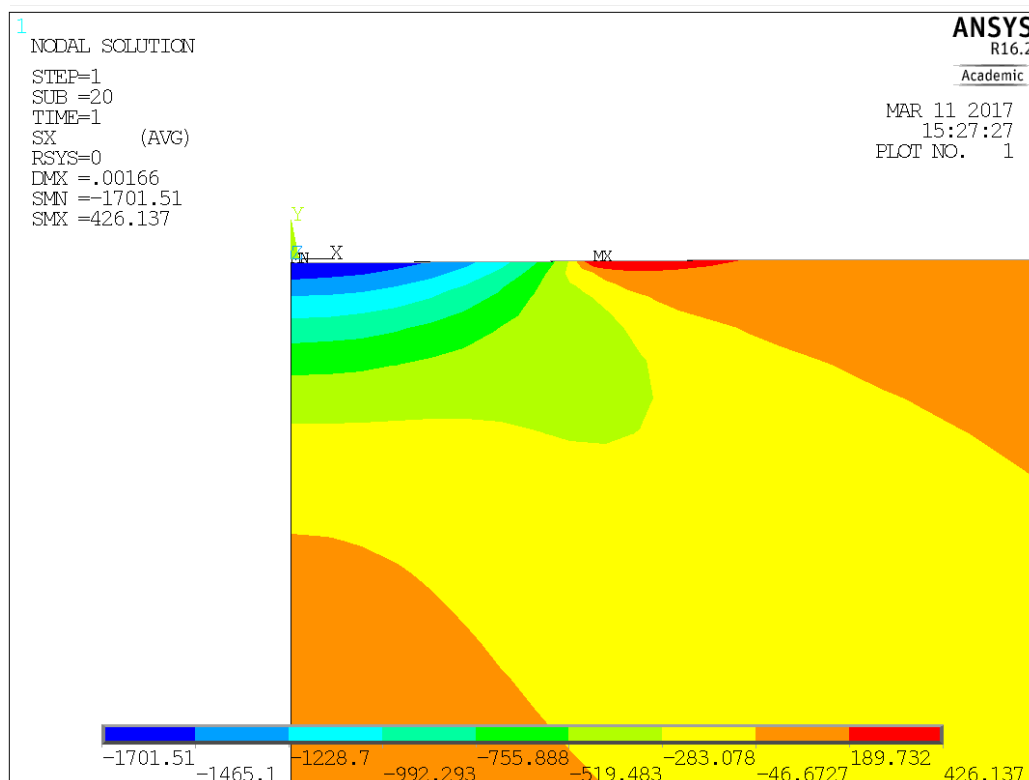
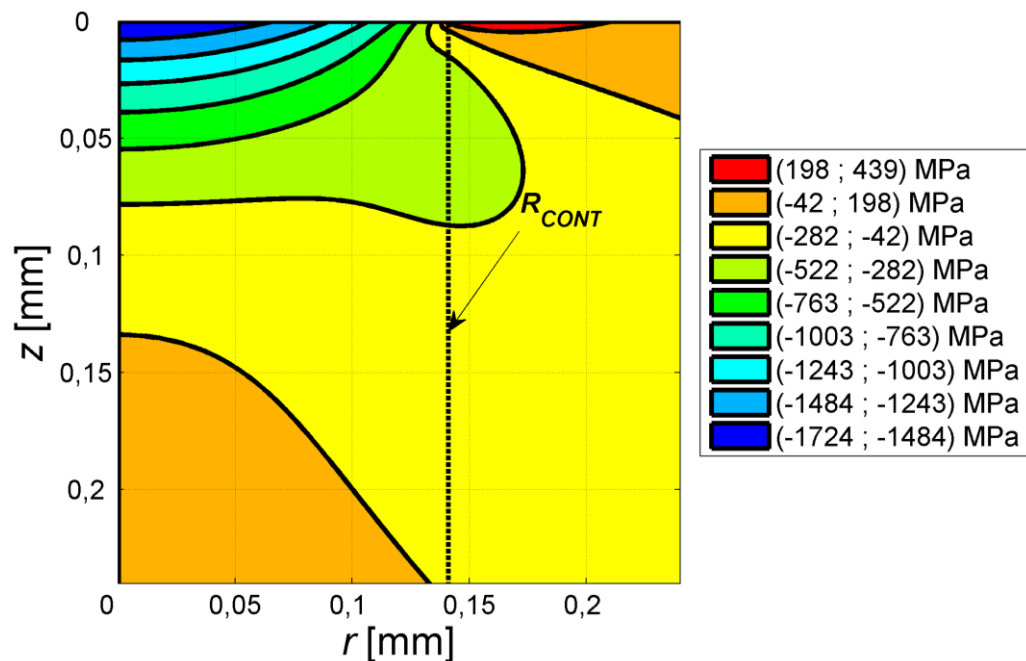
Obr. 4.13 představuje srovnání napětí σ_r mezi modely podél osy z . Zde lze vidět téměř dokonalou shodu numerického modelu s analytickým.



Obr. 4.13 Srovnání napětí σ_r mezi modely podél osy z

Na Obr. 4.14 je ukázáno srovnání napětových polí σ_r mezi oběma modely. Tvary polí se shodují, menší rozdíly se objevují pouze v hodnotách maximálních napětí.

Lze tedy prohlásit, že numerický MKP model je ve velmi dobré shodě s analytickým modelem, a ten tak lze rovnocenně využít k dalším výpočtům.



Obr. 4.14 Srovnání napětových polí σ_r mezi analytickým (nahore) a MKP (dole) modelem

5 PREDIKCE VZNIKU TRHLINY V OKOLÍ KONTAKTU

Tato kapitola se zabývá analýzou podmínek pro iniciaci Hertzovy trhliny v keramické desce zatížené kontaktem deformovatelným kulovým tělesem. Pro snížení simulačních nároků je místo kontaktní úlohy deska zatížena přímo prostřednictvím kontaktního tlaku uvedeného v kapitole 3.1.1. K simulacím je využito programovacího jazyka ANSYS Mechanical APDL. Jak již bylo zmíněno v kapitole 2.1, Hertzova trhlina vzniká z povrchových defektů nejčastěji v podobě prstencové trhliny.

Ačkoliv se zdá, že iniciace trhliny nejpravděpodobněji nastane v místě s nejvyšším tahovým napětím, tj. ve vzdálenosti R_{CONT} , podle [21] tomu tak není. Z energetického hlediska totiž vznikají mnohem vhodnější podmínky pro iniciaci trhliny v intervalu vzdáleností $(1,0; 1,5) \cdot R_{CONT}$.

V této kapitole je popsán model určený k simulaci iniciace Hertzovy trhliny; následuje studie, jejímž cílem je analýza nejvýhodnější polohy pro iniciaci trhliny. Na závěr je provedena parametrická studie, jejímž cílem je určit závislost kritických zátěžných podmínek na poloměru vtlačované kulové plochy při různých mechanických vlastnostech desky.

5.1 Model simulující iniciaci Hertzovy trhliny

Pro simulování iniciace Hertzovy trhliny byly v programovacím jazyce ANSYS Mechanical APDL vytvořeny následující skripty:

- *HCrack.inp* – skript, který analyzuje, při jaké velikosti zátěžné síly u daných parametrů dojde k iniciaci prstencové trhliny, a vypíše lomově mechanické parametry;
- *HCrackPar.inp* – skript vytvořený za účelem provádění parametrické studie závislosti kritických zátěžných podmínek na poloměru vtlačované kulové plochy;
- *HCrackFind.inp* – skript, pomocí kterého lze zjistit nejvýhodnější polohu trhliny pro její iniciaci;
- *makeGeom.inp* – pomocný skript, který vytvoří geometrii modelu pro skripty *HCrack.inp* a *HCrackPar.inp*;
- *makeGeomF.inp* – pomocný skript, který vytvoří geometrii modelu pro skript *HCrackFind.inp*.

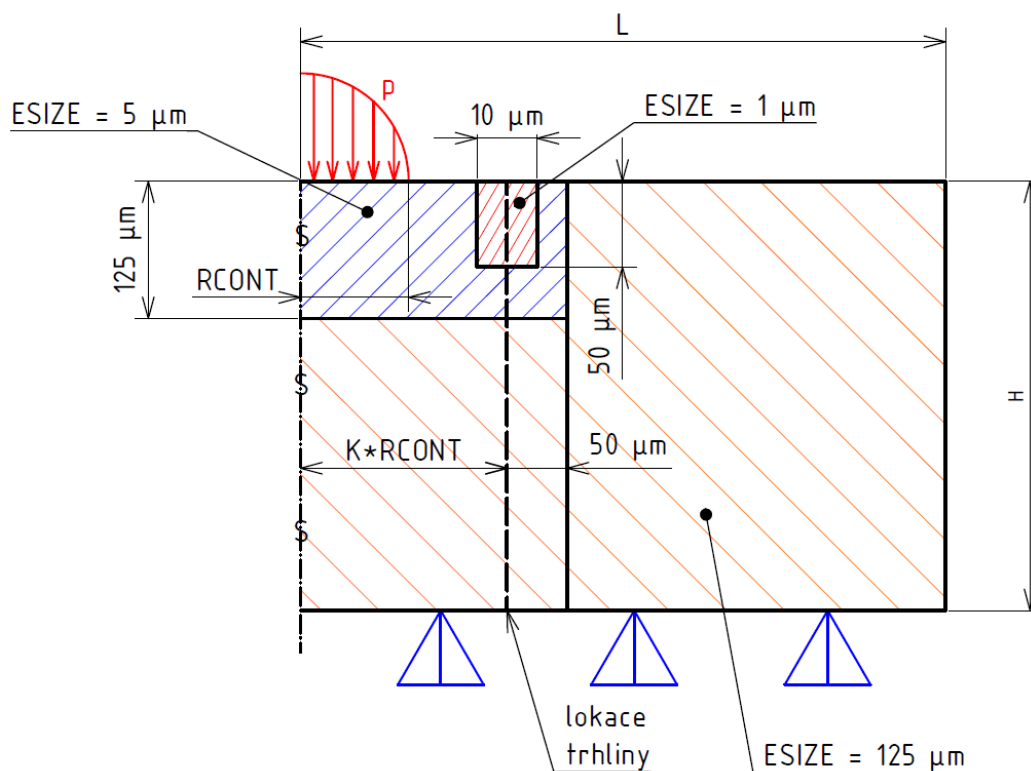
Skripty byly navrženy tak, aby uživatel na vstupu zadal rozmezí parametrů, se kterými bude program dále počítat. Po skončení výpočtu program vykreslí výsledky do grafů a uloží je do složky, kde jsou tyto skripty umístěny.

5.1.1 Popis modelu

Základ modelu ve skriptech uvedených v kapitole 5.1 vychází z numerického modelu Hertzova kontaktu. Protože výpočet výsledků numerického modelu Hertzova kontaktu trvá relativně dlouho, byl tento model zjednodušen tak, že geometrie a silové působení kuličky bylo nahrazeno Hertzovým rozložením tlaku podle rovnice (3.1), který je uložen v paměti jako funkce vzdálenosti x od počátku globálního souřadného systému. Díky tomuto zjednodušení se výrazně zkrátí výpočetní čas na jednu simulaci, jelikož z nelineární kontaktní úlohy se stala lineární úloha bez kontaktů. Model je tudíž tvořen pouze modifikovanou geometrií desky, jejíž síť se skládá z 2D prvků PLANE183 s

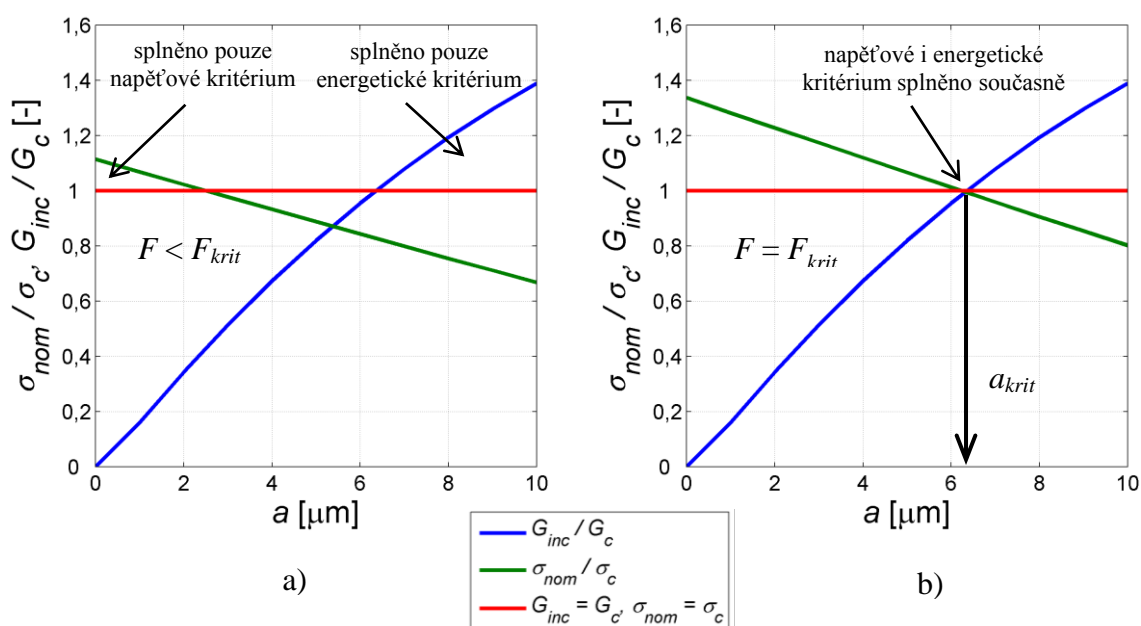
osově symetrickým chováním. Desce je na spodní straně zamezeno pohybu ve směru osy y a na osu symetrie je předepsána symetrická okrajová podmínka.

Geometrie desky, jejíž návrh vychází z [22], s realizací okrajových podmínek je znázorněna na Obr. 5.1. Síť je na x-ové pozici trhliny rozpojena a potřebná délka trhliny je vytvořena spojením sousedních (zdvojených) uzlů na nespojených plochách (viz Obr. 5.1) pomocí příkazu **nummrg**. Interval velikostí trhlín byl pro všechny skripty nastaven na 0 – 10 μm s krokem o velikosti 1 μm . V místech přechodu hrubé sítě na jemnější je provedeno lokální zjemnění, aby přechod byl plynulejší.



Obr. 5.1 Geometrie desky s realizací okrajových podmínek

Po vyřešení úlohy program spočítá deformační energii v tělese, pomocí níž vypočítá hodnotu G_{inc} (viz kapitola 3.2.2), a uloží nominální hodnoty radiálního napětí σ_{nom} v potenciálních místech kořene trhliny do paměti. Následně jsou pro dané silové zatížení dopočítány parametry $\frac{G_{inc}}{G_c}$ a $\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_c}$ pro různé délky trhliny (viz kapitola 3.2.2). Nyní je zkontrolováno, zda bylo splněno sdružené kritérium pro vznik trhliny, tj. zda je $G_{inc} > G_c$ a zároveň $\sigma_{nom} > \sigma_c$. Pokud není (viz Obr. 5.2a), navýší se hodnota aplikovaného zatížení (síly F) a výpočet se opakuje, dokud sdružené kritérium není splněno – Obr. 5.2b. Po splnění sdruženého kritéria se výpočet ukončí a v případě parametrické studie nebo hledání ideálního místa pro iniciaci trhliny se změní počáteční parametry a program začne počítat s novým nastavením (geometrie, materiálu desky nebo indontoru apod.).



Obr. 5.2 Grafická demonstrace sdruženého energeticko-napětového kritéria: a) sdružené kritérium není splněno (žádná trhlinka), b) sdružené kritérium je právě nyní splněno – iniciace trhlinky o délce a_{krit}

5.1.2 Studie ideálního místa pro iniciaci trhliny

Před samotnou predikcí iniciace prstencové trhliny je vhodné získat závislost velikosti kritické síly na pozici trhliny. Cílem je získat takovou pozici trhliny, ve které jsou nejpriznivější podmínky pro její další růst.

Aby byla ověřena platnost tvrzení v [21], je použit skript *HCrackFind.inp* s pevně stanovenými vstupními údaji, které jsou uvedeny v Tab. 3.

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
poloměr desky (L)	7,5 mm	Poissonův poměr desky (MICER)	0,22
tloušťka desky (H)	5 mm	Lomová houževnatost (KIC)	3 MPa · m ^{0,5}
poloměr kuličky (RADIUS)	5 mm	Mez pevnosti v tahu (SC)	500 MPa
Youngův modul desky (YOUNGCER)	300 GPa	Silový krok (FORCE_step)	100 N

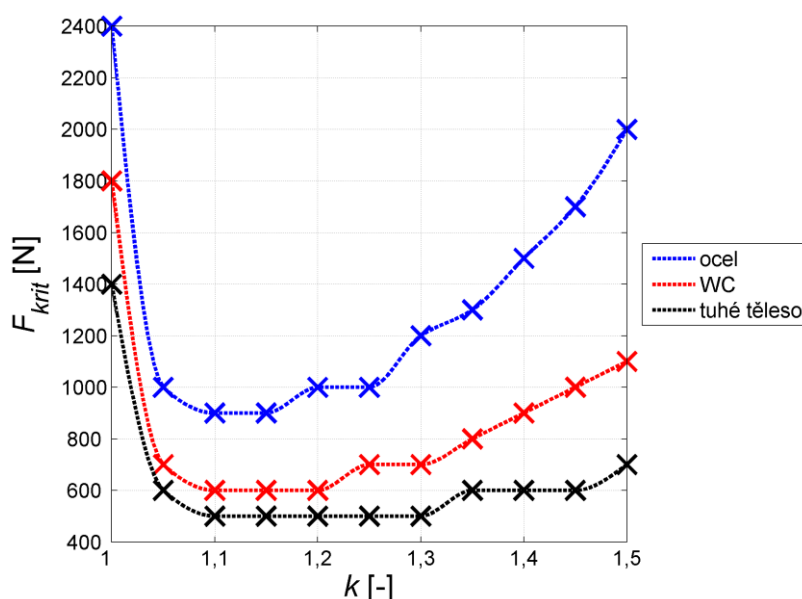
Tab. 3 Hodnoty vstupních parametrů výpočtového modelu

Pro studii byla uvažována kulička ze tří různých materiálů. Jejich vlastnosti jsou uvedeny v Tab. 4.

Materiál	Youngův modul [GPa]	Poissonův poměr [-]
ocel	210	0,3
karbid wolframu (WC) [23]	629	0,211
tuhé těleso	∞	-

Tab. 4 Vlastnosti materiálů kuličky použitých pro studii

Výsledky závislosti $F_{krit} = f(k)$ jsou znázorněny na Obr. 5.3.



Obr. 5.3 Výsledky závislosti kritické síly na vzdálenosti od počátku

Z výsledků vyplývá, že nejlepší podmínky pro iniciaci prstencové trhliny jsou splněny v intervalu $\langle 1,10; 1,20 \rangle \cdot R_{CONT}$. Zajímavá je též i skutečnost, že při použití tužších kuliček se interval ideálních podmínek zvětšuje.

Při pohledu na Obr. 4.3, na kterém je zobrazeno napěťové pole σ_r , lze vidět, že čím blíže je trhlina u hodnoty R_{CONT} , tím méně zasahuje oblast s tahovým napětím do hloubky desky. Na základě výsledků a možnosti, že by se v kořeni trhliny mohla vyskytnout tlaková napjatost, byla pro následující výpočty zvolena nejkonzervativnější hodnota parametru $k = 1,20$.

5.2 Parametrická studie závislosti kritické síly na velikosti kulové plochy

Pro získání závislosti kritických zátěžných podmínek na poloměru vtlačované kulové plochy byly provedeny následující dvě studie:

- závislost $F_{krit}(R)$ a $a_{krit}(R)$ pro různé hodnoty meze pevnosti v tahu σ_c ;
- závislost $F_{krit}(R)$ a $a_{krit}(R)$ pro různé hodnoty lomové houževnatosti K_{IC} .

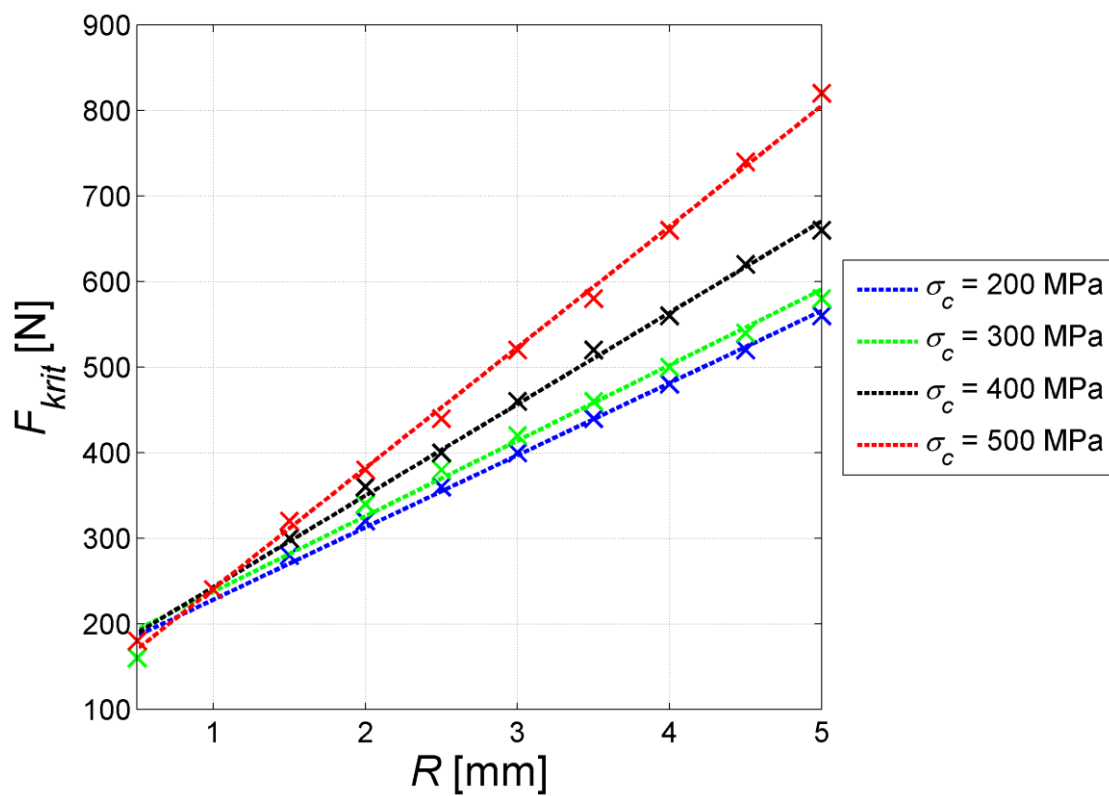
K získání výsledků byl použit skript *HCrackPar.inp* s počátečními parametry uvedenými v Tab. 5.

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
poloměr desky (L)	7,5 mm	Poissonův poměr desky (MICER)	0,22
tloušťka desky (H)	5 mm	Změny poloměru kuličky (R_step)	0,5 mm
Youngův modul kuličky (YOUNGIND)	210 GPa	Silový krok (FORCE_step)	20 N
Youngův modul desky (YOUNGCER)	390 GPa	Maximální délka trhliny (ALEN_to)	12 μm
Poissonův poměr kuličky (MIIND)	0,3	Změny délky trhliny (ALEN_step)	0,25 μm

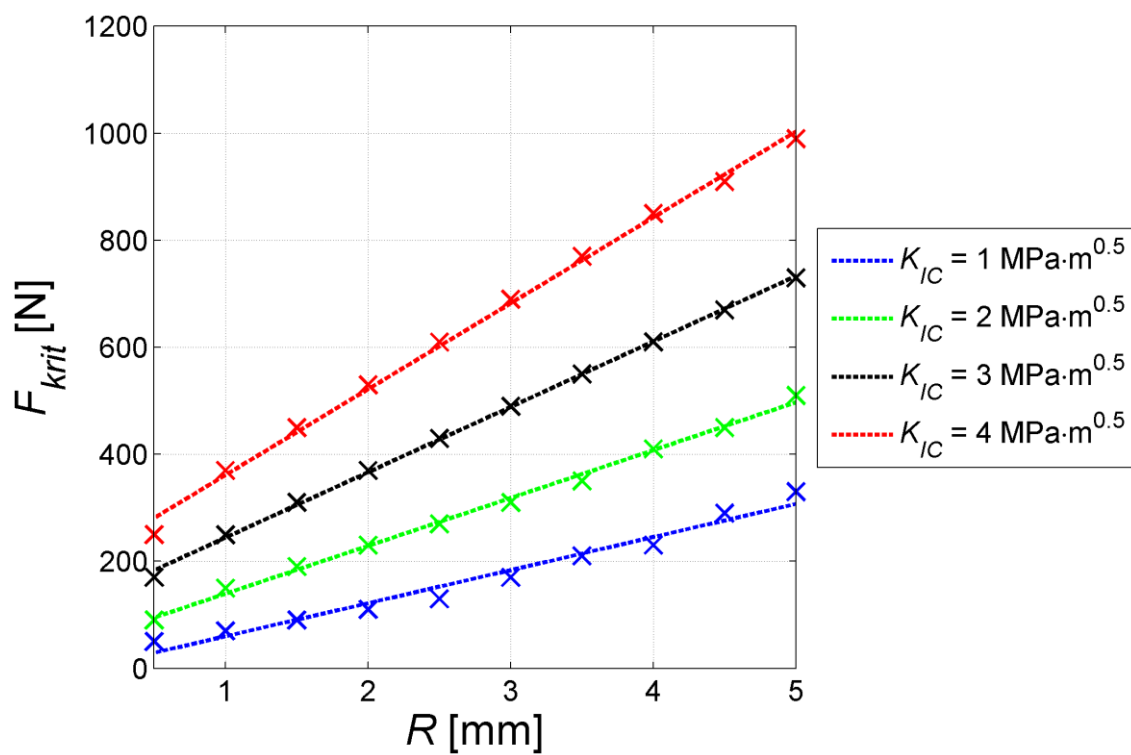
Tab. 5 Vstupní parametry použité ve studii

Dále byla pevně nastavena velikost lomové houževnatosti $K_{IC} = 3 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0,5}$, resp. hodnota meze pevnosti v tahu $\sigma_c = 450 \text{ MPa}$ pro získání závislostí kritických zátěžných podmínek pro různé hodnoty σ_c , resp. K_{IC} .

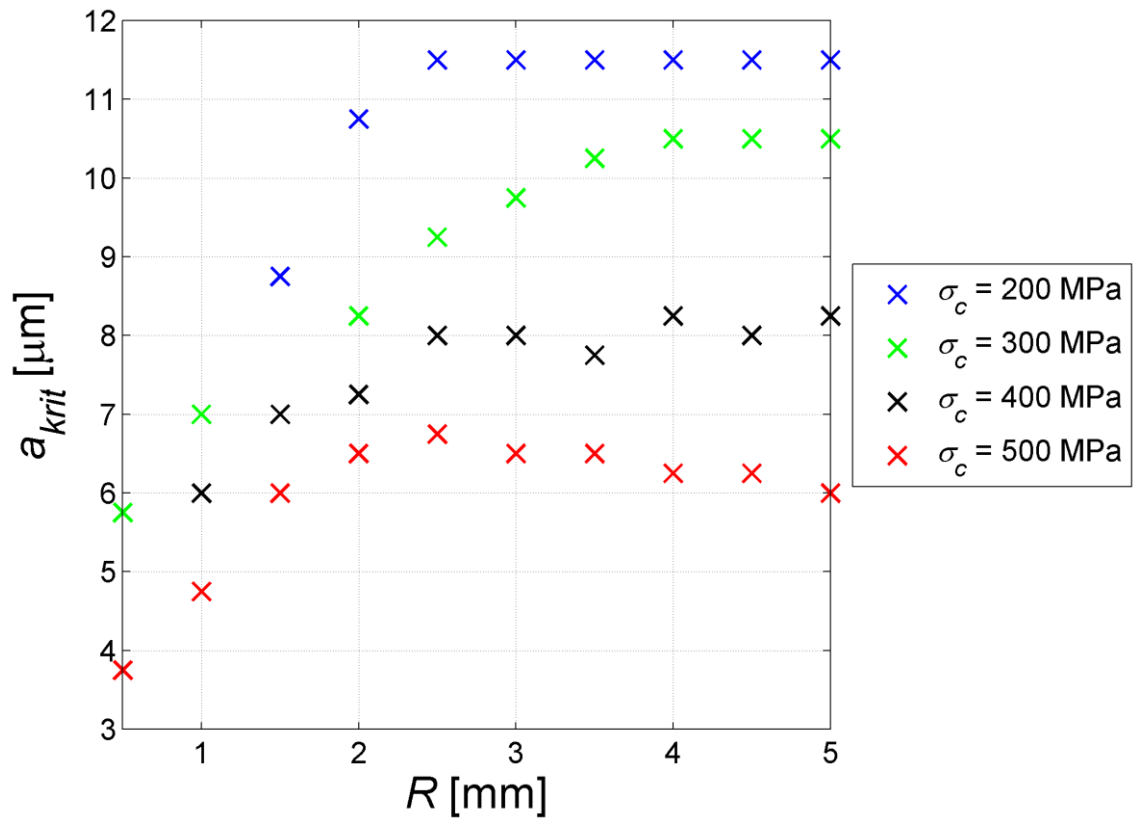
Grafická znázornění těchto výsledků jsou na Obr. 5.4 až Obr. 5.7. U obou studií lze vidět, že kritická síla roste lineárně s poloměrem vtlačované kuličky. Výsledky kritických délek trhliny nelze spolehlivě popsat žádnou funkcí. Skoky v těchto výsledcích jsou způsobeny omezeným rozsahem délek trhlín a velkým délkovým krokem.



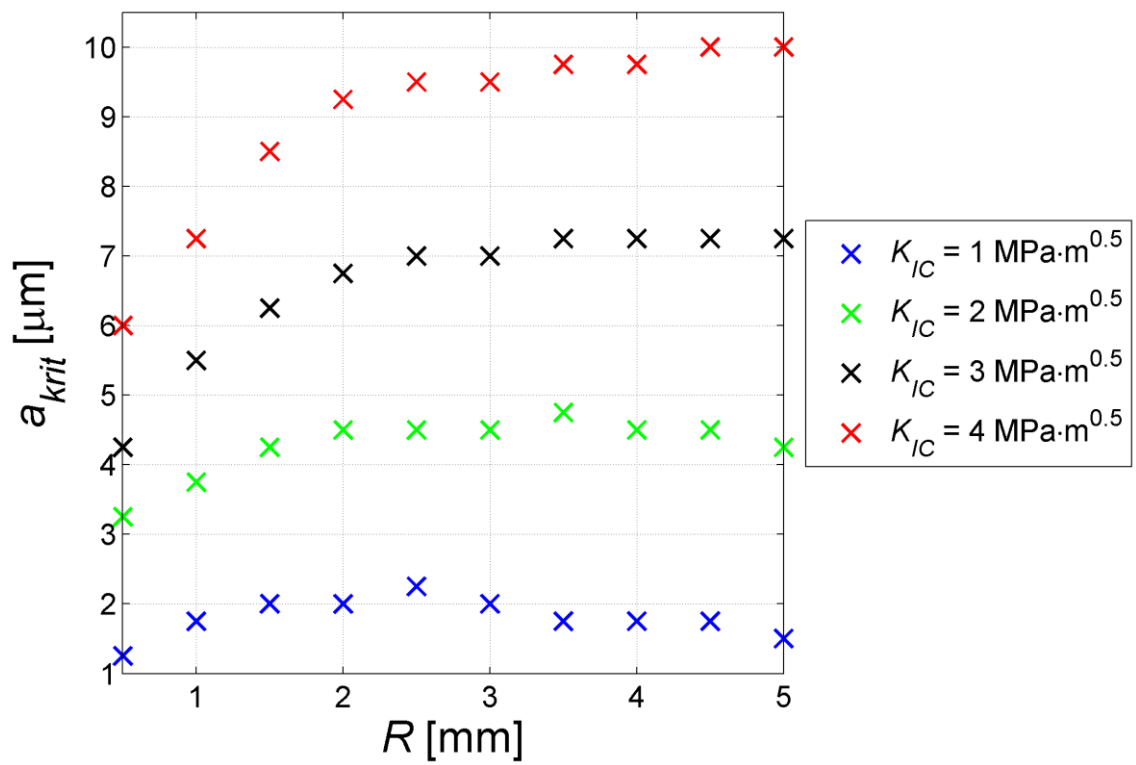
Obr. 5.4 Závislost $F_{krit}(R)$ pro různé hodnoty σ_c



Obr. 5.5 Závislost $F_{krit}(R)$ pro různé hodnoty K_{IC}



Obr. 5.6 Závislost $a_{krit}(R)$ pro různé hodnoty σ_c



Obr. 5.7 Závislost $a_{krit}(R)$ pro různé hodnoty K_{IC}

Pro případ studie s různými hodnotami meze pevnosti v tahu σ_c lze z výsledků konstatovat, že čím vyšší je hodnota σ_c , tím větší zatížení musí působit, aby došlo k iniciaci prstencové trhliny. Dále si lze všimnout, že kritická délka trhliny klesá s narůstající hodnotou σ_c .

V případě studie s různými hodnotami lomové houževnatosti lze taktéž pozorovat, že velikost kritické síly (při daném poloměru indentoru R) roste spolu s velikostí lomové houževnatosti, ale rozdíly mezi hodnotami kritické síly pro různé velikosti K_{IC} jsou zde již značnější. Hodnoty kritické délky trhliny zde vykazují větší změny než v předcházejícím případě; při větších hodnotách K_{IC} lze vidět nápadné změny ve tvaru závislosti.

5.3 Porovnání výstupu vytvořeného modelu s dostupnými experimentálními daty

V této kapitole bude ověřeno, jak přesně dokáže vytvořený model predikovat vznik prstencové trhliny. Cílem je zjistit, při jaké hodnotě zátěžné síly jsou splněny podmínky pro vznik trhliny a tuto hodnotu pak srovnat s naměřenými hodnotami. K tomuto účelu posloužil skript *HCrack.inp*. Materiálová data experimentálních vzorků, pro něž bude kritická zátěžná síla predikována, jsou uvedena v Tab. 6.

Materiál desky	E [GPa]	μ [-]	K_{IC} [MPa · m ^{0,5}]
SiC–B	446	0,154	4,13
SiC–N	454	0,171	4,49
SiC–HPN	443	0,155	4,45
SiC–SC–1RN	432	0,154	4,13

Tab. 6 Materiály použité v experimentu a jejich vlastnosti [24]

Další potřebné parametry vstupující do skriptu *HCrack.inp* jsou uvedené v Tab. 7 a jsou společné pro všechny výše uvážené materiály (Tab. 6). Orientační hodnota parametru SC byla získána ze zdroje [25].

Parametr	Hodnota
tloušťka desky (H)	3 mm
poloměr desky (L)	10 mm
mez pevnosti v tahu (SC)	550 MPa
poloměr kuličky (RADIUS)	1,25 mm
Youngův modul kuličky (YOUNGIND)	1141 GPa
Poissonův poměr kuličky (MIIND)	0,07
Silový krok (FORCE_step)	10 N

Tab. 7 Pevně dané parametry modelu [24]

Výsledky modelu (F_{model}) spolu s naměřenými hodnotami sil (F_{exp}) jsou zaznamenány v Tab. 8.

Materiál desky	F_{exp} [N]	F_{model} [N]
SiC–B	160 – 190	180
SiC–N	190 – 210	220
SiC–HPN	230 – 250	200
SiC–SC–1RN	150 – 170	180

Tab. 8 Hodnoty vypočtených a naměřených kritických sil [24]

Ze získaných výsledků je patrné, že použitý model je v relativně dobré shodě s experimentálními měřeními. Predikovaná síla se od krajních hodnot experimentálně naměřených sil liší ve většině případů v rozmezí pouze 5-10 % (od horní hranice). Pouze v jednom případě je predikovaná síla o cca 15 % nižší, než je experimentálně naměřená. Odchytky ve výsledcích lze patrně připsat nahodilému rozložení povrchových defektů ve vzorcích, které mohou významně ovlivnit velikost kritické síly (viz kapitola 5.1.2). Na základě dosažených výsledků lze prohlásit, že model lze využít přinejmenším pro získání odhadu hodnoty zátěžné síly, která vyvolá vznik Hertzovy trhliny.

6 ZÁVĚR

Tato práce se zabývala modelováním kontaktního porušování keramických materiálů. Cílem práce bylo vytvořit analytický a numerický MKP model kontaktu kulové plochy s rovnou deskou, které by byly schopny spolehlivě popsat napjatost v rovné desce zatížené tlakem prostřednictvím kulového indentoru. Dalším cílem bylo tyto vytvořené modely využít k predikci vzniku prstencové (Hertzovy) trhliny na povrchu keramické desky a ověřit jejich platnost porovnáním s dostupnými experimenty.

Při tvorbě analytického, resp. numerického MKP modelu popisujícího kontakt kulové plochy s deskou bylo využito programového prostředí MATLAB, resp. ANSYS Mechanical APDL. Analytický model vychází z Hertzovy teorie kontaktu kulová plocha vs. kulová plocha uvedené v řešební části a pomocí něj lze vyjádřit i napjatost v libovolném bodě rovné desky (při uvážení nekonečného poloměru u jedné z kulových ploch). Numerický MKP model byl vytvořen jako plně parametrická 2D kontaktní úloha s rotační symetrií z důvodu minimalizace hardwarových nároků výpočtu. Výstup numerického modelu byl následně porovnán s analytickým řešením a byla prokázána velmi dobrá shoda mezi oběma modely. Velkou výhodou analytického modelu je jeho hardwarová nenáročnost a především rychlost v porovnání s numerickým modelem, řešícím kontaktní úlohu pomocí MKP. Analytický model tak lze s výhodou využít např. pro velmi rychlý odhad intervalu, ve kterém se může nacházet kritická síla vedoucí ke vzniku prstencové trhliny.

Výše uvedený numerický MKP model kontaktní úlohy byl v další části práce upraven s cílem získat potřebná data pro predikci iniciace prstencové trhliny s využitím sdruženého energeticko-napěťového kritéria. Jelikož provedené parametrické studie obnášely velký počet simulací, byl kontakt kulové plochy s deskou přímo nahrazen Hertzovým rozložením tlaku na desce (s využitím analytických vztahů), což umožnilo počítat celou úlohu jako lineární (pro danou zátěžnou sílu) a tudíž i mnohem rychleji. Nejdříve byla provedena studie, díky níž byla získána závislost kritické zátěžné síly pro iniciaci prstencové trhliny v různých vzdálenostech od počátku souřadného systému. Cílem bylo odhalit nejpravděpodobnější místo, kde dojde ke vzniku trhliny. Ukázalo se, že nejvhodnější podmínky pro její vznik se nachází v radiální vzdálenosti 1,1 až 1,2 násobku kontaktního poloměru od středu kontaktu (jedná se o místo, kde je třeba co nejmenší aplikovaná síla). Studie dále odhalila skutečnost, že čím tužší kulička je vtlačována do desky, tím širší je tento interval ideálních podmínek. Následovalo provedení parametrické studie, jejímž výstupem byla závislost kritických zátěžných podmínek na poloměru vtlačované kulové plochy při použití různých materiálových charakteristik vstupujících do sdruženého kritéria – zejména meze pevnosti materiálu a jeho lomové houževnatosti. Tato studie ukázala, že kritická zátěžná síla roste lineárně se zvětšujícím se poloměrem vtlačované kulové plochy a rovněž roste s rostoucí hodnotou obou výše uvedených lomově-mechanických charakteristik.

Na závěr práce byly porovnány modelem predikované hodnoty kritické zátěžné síly s dostupnými experimentálními daty. Na základě dosažených výsledků lze prohlásit, že model vytvořený v rámci této práce lze využít k získání relativně přesného odhadu velikosti kritické zátěžné síly vedoucí ke vzniku prstencové trhliny. Tímto byly všechny nadefinované cíle práce zcela splněny.

SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

<i>Obr. 1.1 Aplikace keramických materiálů</i>	9
<i>Obr. 2.1 Hertzova trhlina</i>	10
<i>Obr. 2.2 Jednotlivé fáze vzniku Hertzovy trhliny</i>	10
<i>Obr. 2.3 Vznik trhliny při použití ostrého indentoru</i>	11
<i>Obr. 3.1 Příklad kontaktu</i>	12
<i>Obr. 3.2 Kontakt dvou kulových ploch s rozložením kontaktního tlaku</i>	13
<i>Obr. 3.3 Prvky typu Contact a Target</i>	16
<i>Obr. 3.4 Způsoby detekce kontaktu</i>	16
<i>Obr. 3.5 Základní zatěžovací módy</i>	17
<i>Obr. 4.1 Typ řešení kontaktní úlohy a souřadný systém analytického modelu</i>	19
<i>Obr. 4.2 Skript Hertz</i>	20
<i>Obr. 4.3 Pole napětí σ_r</i>	21
<i>Obr. 4.4 Pole napětí σ_θ</i>	21
<i>Obr. 4.5 Pole napětí σ_z</i>	22
<i>Obr. 4.6 Výsledky analytického modelu</i>	23
<i>Obr. 4.7 MKP model kontaktní úlohy</i>	24
<i>Obr. 4.8 Geometrie MKP modelu</i>	25
<i>Obr. 4.9 Průběhy napětí na povrchu desky</i>	27
<i>Obr. 4.10 Průběhy napětí podél osy z</i>	28
<i>Obr. 4.11 Příkazové okno MATLABu – kontrola existence vstupních souborů</i>	28
<i>Obr. 4.12 Srovnání napětí σ_r mezi modely na povrchu desky</i>	29
<i>Obr. 4.13 Srovnání napětí σ_r mezi modely podél osy z</i>	29
<i>Obr. 4.14 Srovnání napěťových polí σ_r mezi analytickým a MKP modelem</i>	30
<i>Obr. 5.1 Geometrie desky s realizací okrajových podmínek</i>	32
<i>Obr. 5.2 Grafická demonstrace sdruženého energeticko-napěťového kritéria</i>	33
<i>Obr. 5.3 Výsledky závislosti kritické síly na vzdálenosti od počátku</i>	34
<i>Obr. 5.4 Závislost $F_{krit}(R)$ pro různé hodnoty σ_c</i>	36
<i>Obr. 5.5 Závislost $F_{krit}(R)$ pro různé hodnoty K_{IC}</i>	36
<i>Obr. 5.6 Závislost $a_{krit}(R)$ pro různé hodnoty σ_c</i>	37
<i>Obr. 5.7 Závislost $a_{krit}(R)$ pro různé hodnoty K_{IC}</i>	37
 <i>Tab. 1 Parametry pro citlivostní analýzu</i>	 26
<i>Tab. 2 Výsledky citlivostní analýzy</i>	26
<i>Tab. 3 Hodnoty vstupních parametrů výpočtového modelu</i>	33
<i>Tab. 4 Vlastnosti materiálů kuličky použitých pro studii</i>	34
<i>Tab. 5 Vstupní parametry použité ve studii</i>	35
<i>Tab. 6 Materiály použité v experimentu a jejich vlastnosti</i>	38
<i>Tab. 7 Pevně dané parametry modelu</i>	38
<i>Tab. 8 Hodnoty vypočtených a naměřených kritických sil</i>	39

SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK

APDL	Ansys Parametric Design Language
FEM	Finite Element Method
LELM	Lineárně elastická lomová mechanika
MKP	metoda konečných prvků
a	délka trhliny
a_{krit}	kritická délka trhliny
E	modul pružnosti v tahu
E_{cer}	Youngův modul desky
E_{ind}	Youngův modul kulové plochy
$f\left(\frac{a}{w}\right)$	tvarová funkce
F	velikost zátěžné síly
F_{exp}	experimentálně získaná hodnota kritické zátěžné síly
F_{krit}	kritická hodnota zátěžné síly
F_{model}	modelem získaná hodnota kritické zátěžné síly
G	hnací síla trhliny
G_C	lomová houževnatost materiálu
G_{inc}	inkrementální hnací síla trhliny
K	faktor intenzity napětí
K_{IC}	lomová houževnatost
L	pomocná proměnná pro výpočet napjatosti
p	kontaktní tlak
p_0	maximální velikost kontaktního tlaku
r	vzdálenost od osy z
R	poloměr kulové plochy
R_{CONT}	poloměr kontaktní oblasti
R_{red}	redukovaná vzdálenost od osy z
t	výpočtový čas
W_{el}	deformační energie
W_s	energie volných povrchů
z	vzdálenost od povrchu desky
Z_{red}	redukovaná vzdálenost od povrchu desky
μ	Poissonův poměr
σ_C	mez pevnosti v tahu
σ_{nom}	nominální napětí v potenciálním kořeni trhliny
σ_r	napětí v radiálním směru
σ_{rmax}	maximální hodnota radiálního napětí
σ_{rmin}	minimální hodnota radiálního napětí
σ_z	napětí ve směru osy z
σ_θ	napětí v tečném směru
σ_∞	nominální napětí v místě trhliny

REFERENCE

- [1] ZOHDY, Ziad. Applications of ceramics. In: *LinkedIn: SlideShare* [online]. 2013 [cit. 2017-01-19]. Dostupné z: <http://www.slideshare.net/ZOTTY/applications-of-ceramics>
- [2] ZrO₂ Ceramic bearing. *CEMA Ceramic Bearing* [online]. ©2017 [cit. 2017-01-19]. Dostupné z: <http://www.cemabearing.com/semiconductor-solar/CF.php>
- [3] Dental Implants. *Frisco Elm Dental* [online]. ©2017 [cit. 2017-01-19]. Dostupné z: <http://www.friscoelmdental.com/dental-implants/>
- [4] CD759 REAR Ceramic Brake Pad For CHRYSLER PT Cruiser 01-07 R. *EverAfterGuide.com* [online]. [cit. 2017-01-19]. Dostupné z: <https://www.everafterguide.com/cd759-rear-ceramic-brake-pad-for-chrysler-pt-cruiser-01-07-r-d8220fd28ab715fa.html>
- [5] LAWN, Brian R. Indentation of Ceramics with Spheres: A Century after Hertz. *Journal of the American Ceramic Society* [online]. 1998, **81**(8), 1977-1994 [cit. 2017-01-19]. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1998.tb02580.x. ISSN 00027820. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1151-2916.1998.tb02580.x>
- [6] LAWN, Brian R. *Fracture of brittle solids*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1993. ISBN 05-214-0176-3.
- [7] ANSYS Mechanical Structural Nonlinearities: Lecture 3 Introduction to Contact. In: *Colorado School of Mines* [online]. 2010 [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: http://inside.mines.edu/~apetrell/ENME442/Labs/1301_ENME442_lab6_lecture.pdf
- [8] Rigid Body Contact Forces. *MyPhysicsLab* [online]. ©2016 [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: <http://www.mypysicslab.com/engine2D/contact/contact-en.html>
- [9] JOHNSON, K. L. *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. ISBN 05-212-5576-7.
- [10] Biotribology of artificial hip joints. *Baishideng Publishing Group: World Journal of Orthopedics* [online]. ©2015 [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: <http://www.wjgnet.com/2218-5836/full/v6/i1/77.htm>
- [11] Contact Stresses and Deformations. In: *University of Utah: ME EN 7960 - Precision Machine Design - Lecture Notes* [online]. 2006 [cit. 2017-01-19]. Dostupné z: <http://www.mech.utah.edu/~me7960/lectures/Topic7-ContactStressesAndDeformations.pdf>
- [12] LOUAPRE, David a Kristin BREDER. Hertzian Indentation Stress Field Equations. *International Journal of Applied Ceramic Technology* [online]. 2015, **12**(5), 1071-1079 [cit. 2017-01-19]. DOI: 10.1111/ijac.12317. ISSN 1546542x. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/ijac.12317>
- [13] ANSYS Mechanical APDL Contact Technology Guide [online]. 2013 [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: <http://148.204.81.206/Ansys/150/ANSYS%20Mechanical%20APDL%20Contact%20Technology%20Guide.pdf>
- [14] VLACH, Bohumil. Základy lomové mechaniky. In: *VUT v Brně: ÚMVI, FSI* [online]. [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/mezni_stavy/podklady/06%20-%20Lomova%20mechanika.pdf

- [15] ROYLANCE, David. Introduction to Fracture Mechanics. In: *MIT - Massachusetts Institute of Technology* [online]. 2001 [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: <http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/modules/frac.pdf>
- [16] Brittle Fracture. *University of Cambridge: Online Materials Science Learning Resources: DoITPoMS* [online]. 2011 [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/brittle_fracture/printall.php
- [17] LEGUILLON, Dominique. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics - A/Solids* [online]. 2002, **21**(1), 61-72 [cit. 2017-01-22]. DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01184-6. ISSN 09977538. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753801011846>
- [18] LEGUILLON, D., E. MARTIN, O. ŠEVEČEK a R. BERMEJO. Application of the coupled stress-energy criterion to predict the fracture behaviour of layered ceramics designed with internal compressive stresses. *European Journal of Mechanics - A/Solids* [online]. 2015, **54**, 94-104 [cit. 2017-01-22]. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.06.008. ISSN 09977538. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753815000686>
- [19] Customizing contour plots. *Undocumented Matlab* [online]. 2015 [cit. 2017-01-25]. Dostupné z: <http://undocumentedmatlab.com/blog/customizing-contour-plots>
- [20] IMAOKA, Sheldon. Preventing Rigid-Body Motion in Contact Problems. In: *Ansys.net* [online]. 2001 [cit. 2017-01-25]. Dostupné z: http://ansys.net/tips_sheldon/STI02_Rigid_Body_Contact.zip
- [21] OHGUSHI, Kohji a Masahiro ICHIKAWA. Fracture Mechanics Study of Ring Crack Initiation in Ceramics by Sphere Indentation. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A* [online]. 1995, **61**(585), 953-958 [cit. 2017-03-02]. DOI: 10.1299/kikaia.61.953. ISSN 0387-5008. Dostupné z: <http://joi.jlc.jst.go.jp/JST.Journalarchive/kikaia1979/61.953?from=CrossRef>
- [22] ŠEVEČEK, Oldřich, Michal KOTOUL, Dominique LEGUILLON, Eric MARTIN a Raul BERMEJO. Modelling of edge crack formation and propagation in ceramic laminates using the stress–energy coupled criterion. *Engineering Fracture Mechanics* [online]. 2016, **167**, 45-55 [cit. 2017-03-02]. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.03.039. ISSN 00137944. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001379441630145X>
- [23] WERESZCZAK, Andrew A., William L. DALOZ, Kevin T. STRONG a Osama M. JADAAN. Effect of Indenter Elastic Modulus on Hertzian Ring Crack Initiation in Silicon Carbide. *International Journal of Applied Ceramic Technology* [online]. 2011, **8**(4), 885-894 [cit. 2017-03-10]. DOI: 10.1111/j.1744-7402.2010.02522.x. ISSN 1546542x. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1744-7402.2010.02522.x>
- [24] WERESZCZAK, Andrew A., Kurt E. JOHANNIS a Osama M. JADAAN. Hertzian Ring Crack Initiation in Hot-Pressed Silicon Carbides. *Journal of the American Ceramic Society* [online]. 2009, **92**(8), 1788-1795 [cit. 2017-03-10]. DOI: 10.1111/j.1551-2916.2009.03146.x. ISSN 00027820. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1551-2916.2009.03146.x>
- [25] Silicon Carbide SiC Material Properties. *Accuratus* [online]. ©2013 [cit. 2017-03-10]. Dostupné z: <http://accuratus.com/silicar.html>